



دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

آزمون جامع دکتری مهندسی برق-الکترونیک
گرایش ادوات میکرو و نانو
تاریخ: اردی بهشت ۱۳۸۹

مکانیک کوانتومی کاربردی

مدت امتحان: ۸۵ دقیقه

فقط استفاده از کتاب درسی مکانیک کوانتومی کاربردی آزاد است

۱- هامیلتونی تک‌ذره‌ای مقید به پتانسیلی دوبعدی مانند $V_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ و پتانسیل برداری مغناطیسی $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ که در آن $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ است، با صرف نظر از اسپین عبارتست از:

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m} [\mathbb{P} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbb{R})]^2 + V_{\text{ex}}(\mathbb{R})$$

که در آن e بار و m جرم الکترون و c سرعت نور در خلاء است. اگر برای میدان مغناطیسی یک‌نواخت در راستای z به فرم $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$ ، پتانسیل فوک-داروین (Fock-Darwin) به فرم سهموی $V_{\text{ex}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$ داشته باشیم، نشان دهید هامیلتونی فوک-داروین به شکل زیر قابل ساده‌سازی است:

$$\mathbb{H} = \frac{1}{2m} \mathbb{P}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2}\omega_c \mathbb{L}_z$$

که در آن $\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2$ ، $\omega_c = eB_0/mc$ بسامد سیکلوترون، و \mathbb{L}_z عمل‌گر اندازه حرکت زاویه‌ای راستای z است. حالات و انرژی‌های ویژه را در دستگاه مختصات قطبی (بر حسب توابع لاگر تعمیم‌یافته) بیابید.

۲- معادله‌ی دیفرانسیل پوشل-تلر (۵.۱۷) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi(x) &= \xi\psi(x) \\ \mathcal{L} &= -\frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2mU_0}{\hbar^2\beta^2} \text{sech}^2(\beta x) = -\frac{1}{2\beta^2} \frac{d^2}{dx^2} - \text{sech}^2(\beta x) \\ \xi &= \frac{2mE}{\hbar^2\beta^2} = \frac{E}{U_0} \end{aligned}$$

حال عمل گرهای نردبانی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{a}^+ = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{d}{dx} + \gamma \tanh(\beta x)$$

$$\mathbf{a}^- = +\frac{\alpha}{\beta} \frac{d}{dx} + \gamma \tanh(\beta x)$$

جابجاگر این دو عمل گر چیست؟ α و γ را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\mathbf{a}^+ \mathbf{a}^- \psi(x) = (\xi + 1) \psi(x)$$

و بنابراین $\mathcal{L} = \mathbf{a}^+ \mathbf{a}^- - 1$.

۳- پتانسیل پوشل-تلا در (۵.۱۷) به صورت $U(\mathbb{X}) = -2\lambda(\lambda + 1)U_0 \operatorname{sech}^2(\beta\mathbb{X})$ قابل تعمیم است که در آن $\lambda \in \mathcal{E}$ با کمک تبدیل $\psi(x) = P[\tanh(\beta x)]$ نشان دهید این معادله دارای مجموعه جواب‌هایی بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر تعمیم‌یافته و با طیفی تبهگن مانند $E_{\lambda\mu} = -\lambda^2 U_0$ است که در آن $\mu = 1 \dots \lambda$. همچنین نشان دهید جواب‌های غیر مقیدی با انرژی $E_\lambda = +\lambda^2 U_0$ وجود دارند که ضمن عبور دچار بازتاب نمی‌شوند.

موفق باشید