



آزمون جامع دکتری مهندسی برق-الکترونیک
گرایش ادوات میکرو و نانو
تاریخ: ۱۳۸۹/۹/۶

مکانیک کوانتومی کاربردی

مدت امتحان: ۹۰ دقیقه

فقط استفاده از کتاب درسی مکانیک کوانتومی کاربردی آزاد است

۱- تابع گرین $G_E(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)$ برای معادله‌ی شرودینگری با هامیلتونی \mathcal{H} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(E - \mathcal{H})G_E(\mathbf{r}; \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

نشان دهید اگر $\mathcal{H}\psi_n(\mathbf{r}) = E_n\psi_n(\mathbf{r})$ ، آن گاه خواهیم داشت:

$$G_E(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \sum_n \frac{\psi_n^*(\mathbf{r}_1)\psi_n(\mathbf{r}_2)}{E - E_n}$$

حال فرض کنید $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2$. نشان دهید در سه بعد مکانی داریم:

$$G_E(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2) = \frac{\exp[\pm jk(E)|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|]}{4\pi|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

که در آن $k(E) = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. آیا این تابع گرین منحصر به فرد است؟ اکنون نشان دهید معادله‌ی شرودینگری:

$$(E - \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2)\psi_E(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})\psi_E(\mathbf{r})$$

با کمک تابع گرین به فرم معادله‌ای انتگرالی در می‌آید. حال برای $U(\mathbf{r}) = \sum_n U_n\delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$ پاسخ مسئله را

بیابید. اجزای حقیقی $\text{Re}\{G_E(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)\}$ و موهومی $\text{Im}\{G_E(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2)\}$ تابع گرین در چه معادلاتی صدق می‌کنند؟

۲- رابطه‌ی تمامیت $\hat{1} = \int dx |x\rangle\langle x|$ را در نظر بگیرید. با کمک (۲.۳۸.۱) و بسط تیلور نمایش مکانی تابع موج به فرم $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ حول مبدا $x=0$ ، ضرب داخلی $\langle x|\hat{p}_x|\psi\rangle$ را بسط دهید. جملات غیر صفر را در بسط بیابید و از آنجا نشان دهید رابطه‌ی (۲.۲۸.۲) برقرار است.

۳- حالات ویژه‌ی انرژی پتانسیل پوشر-تلر و اتم دیراک در نمایش اندازه حرکت چگونه‌اند؟

۴- احتمال تونل‌زنی از سد پتانسیلی به فرم زیر را محاسبه نمایید (راهنمایی: از حل تقریبی ونتزل-کرامرز-بریلوین استفاده نمایید):

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2, & |x| < \frac{1}{2}d \\ 0 & |x| > \frac{1}{2}d \end{cases}$$

موفق باشید