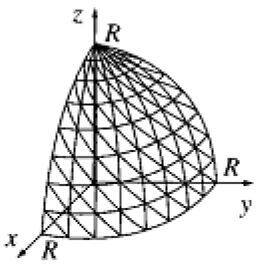
- با فرض $\hat{\phi}\ \sin(\phi) + \hat{\rho}\ \frac{1}{\rho}$ = $\vec{A}$ و همچنین $\vec{B} = \frac{1}{r}\ \hat{r} + \cos(\theta)\hat{\theta}$ مقادیر زیر را در نقطه ($\sqrt{2}$و1و1) حساب کنید.

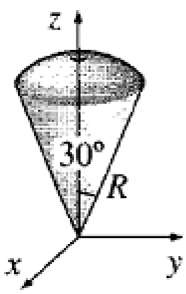
  - $A.B$
  - $A \times B$
  - زاویه بین A و B

- انتگرال تابع زیر را برروی سطح نشان داده شده در شکل زیر را بیابید.



$$\vec{V} = r^2 cos\theta \hat{\mathbf{r}} + r^2 cos\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - r^2 cos\theta sin\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

- انتگرال زیر را برروی سطح بسته نشان داده شده در شکل زیر بیابید.



$$\oint v.ds$$

که در آن میدانیم:

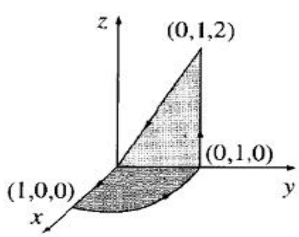
$$\vec{v} = r^2 \sin\theta \hat{r} + 4r^2 \cos\theta \hat{\theta} + r^2 \tan\theta \hat{\varphi}.$$

- انتگرال‌های روی مسیر زیر را حساب کنید:

$$\vec{v} = r\cos^2\theta \hat{r} - r\cos\theta \sin\theta \hat{\theta} + 3r\hat{\varphi}$$

$$\oint \vec{V}\, dl$$

$$\oint \vec{V} . d\vec{l}$$



- عبارات زیر را بیابید:

$a)\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta}, \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \phi}, \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \phi}$

$b) Divergance\ and\ Curl\ of\ \vec{\mathbf{V}} = r^n \hat{\mathbf{r}}$

$c)(\hat{\mathbf{r}}.\nabla)\hat{\mathbf{r}}$

• با مشتق گیری در دستگاه مختصات دکارتی رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{a}|}\right)=-\frac{\vec{r}-\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|^{3}}$$

که در آن $\vec{r}$ بردار موقعیت و $\vec{a}=a_1\hat{x}+a_2\hat{y}+a_3\hat{z}$ یک بردار ثابت است. لازم به ذکر است که رابطه بالا مستقل از دستگاه مختصات است. با مشتق گیری مستقیم در دستگاه استوانه ای نیز رابطه فوق را اثبات کنید.

مسائل اضافی:

• بردار مکان $\vec{r}$ در یک دستگاه مختصات با عبارت زیر بیان می شود:

$$\vec{r}(u_1,u_2,u_3)=4u_1\sin(u_2)\,\hat{x}+2u_1\cos(u_2)\,\hat{y}+u_3\hat{z}$$

که در آن، $\hat{x}$، $\hat{y}$ و $\hat{z}$ بردارهای پایه (base vector) دستگاه مختصات دکارتی هستند.

الف) خطوط مختصات (coordinate lines) را در نقطه $(u_1,u_2,u_3)=\left(1,\pi/4,\sqrt{10}\right)$ ترسیم کنید.

ب) در نقطه مذکور، ضریب متریک h_2 و حاصلضرب $\vec{a}_1\times\vec{a}_3$ را محاسبه کنید ($\vec{a}_i$ بردار پایه دستگاه مختصات مفروض است).

• میدان برداری $\vec{F}(r,\varphi,z)=\frac{\hat{r}}{r}$ در دستگاه مختصات استوانه ای تعریف شده است. اگر $f(x,y)$ یک میدان اسکالر معلوم باشد، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\iint_S f(x,y)\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdy$$

لازم به ذکر است که سطح S در صفحه z=0 قرار دارد.

میدان برداری زیر را در مختصات کارتزین در نظر بگیرید :

$$\vec{F} = -\hat{x}\frac{y}{x^2+y^2} + \hat{y}\frac{x}{x^2+y^2}$$

۱-نمایش میدان را در مختصات استوانه ای بنویسید.

۲-کرل میدان $\vec{F}$ را حساب کنید.

۳-چرخش میدان را حول دایره واحد به مرکز مبدا حساب کنید.(منظور از چرخش میدان $\vec{F}$ حول مسیر بسته ی C انتگرال $\oint \vec{F}.\vec{dl}$ روی مسیر C .هست)

۴-آیا میدان $\vec{F}$ پایستار است؟

۵-آیا می توان میدان اسکالر ϕ را یافت ، طوری که $\vec{F} = \nabla\phi$