



تمرین سری اول – موعده تحویل: شنبه ۱۳۸۷/۷/۲۰

۱. با استفاده از یک هشتم حجم کره‌ای به شعاع R قضیه دیورژانس را برای تابع زیر امتحان کنید:

$$\mathbf{v} = r^2 \cos \theta \hat{r} + r^2 \cos \varphi \hat{\theta} - r^2 \cos \theta \sin \varphi \hat{\varphi}$$

۲. اتحادهای زیر را اثبات کنید:

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{V}) d\tau = - \oint_S \mathbf{V} \times d\mathbf{a} \quad (\text{الف})$$

$$\int \varphi \nabla^2 (\psi) dV + \int \nabla(\varphi) \cdot \nabla(\psi) dV = \oint \varphi (\nabla \psi) \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{ب})$$

$$\int (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \oint (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \cdot d\mathbf{A} \quad (\text{پ})$$

$$\oint \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \nabla T \times d\mathbf{a} \quad (\text{ت})$$

۳. عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\nabla \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = ? \quad (\text{الف}) \quad (\vec{\omega} \text{ برداری ثابت است})$$

$$\nabla \times (f(r)\hat{r}) = ? \quad (\text{ب})$$

$$\hat{n} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{y} \text{ و } f(x, y, z) = 3x^2 + yz^3 \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial n} = ? \quad (\text{پ})$$

$$\hat{e} = \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi} \quad \nabla \times \hat{e} = ? \quad (\text{ت})$$

۴. انتگرال $\mathbf{A} = \int d\mathbf{a}$ روی سطح S را مساحت برداری S می‌نامند.

(الف) مساحت برداری نیمکره‌ای به شعاع R را بیابید.

(ب) نشان دهید \mathbf{A} برای هر سطح بسته‌ای صفر است.

(پ) نشان دهید \mathbf{A} برای همه‌ی سطوح هم‌مرز یکسان است.

۵. انتگرال میدان برداری زیر را روی نیم دایره‌ای به مرکز (0,1,0) و شعاع 1 در نیم صفحه‌ی x^+ محاسبه کنید.

$$\mathbf{A} = \rho^2 z \hat{\rho} + \sin \rho \cos \rho \hat{\varphi} + \rho^2 \cos^2 \varphi \hat{z}$$

۶. انتگرال میدان برداری زیر را روی مسیری که از برخورد سطوح $y = x^2$ و $z = 1$ حاصل می‌شود، از نقطه‌ی (0,0,1) تا نقطه‌ی (2,4,1) محاسبه کنید.

$$\mathbf{F} = 10x\hat{x} - 5x^2y\hat{y} + 3yz^2\hat{z}$$

۷. دو نقطه‌ی $A: (\rho, \varphi, z) = (3, 0, 4)$ و $B: (\rho, \varphi, z) = (6, \frac{2\pi}{3}, 5)$ در دستگاه مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند. مطلوب است:

(الف) فاصله‌ی بین دو نقطه.

(ب) رابطه‌ی بردار \vec{AB} در دستگاه مختصات کارتزین.



۸. زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = \frac{1}{r} \hat{r}$ و $\vec{B} = \frac{1}{\rho} \hat{\rho}$ را در نقطه‌ی $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ بدست آورید.

۹. حاصل عبارت $\iint_S (\cos(\theta) \hat{\rho} + \sin(\theta) \hat{\phi}) \cdot d\vec{S}$ را بیابید. سطح S نیمکره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ مختصات است که در بالای صفحه‌ی xy قرار دارد.

۱۰. برای توابع زیر، $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ را محاسبه کنید:

الف) $\Phi = \Phi_0 e^{-2(x+z)} \cos(\pi y/2)$

ب) $\Phi = \Phi_0 \left(\frac{\cos(\varphi)}{z} \right)^2 \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)$

ج) $\Phi = \Phi_0 \frac{\cos(\theta) \sin^2(\varphi)}{r}$

۱۱. میدان برداری $\vec{A} = \frac{\cos^2(\varphi)}{r^3} \hat{r}$ را در کل فضا نظر بگیرید.

الف) قضیه‌ی دیورژانس را در ناحیه‌ی بین دو پوسته‌ی کروی $r = 1$ و $r = 2$ تحقیق کنید.

ب) قضیه‌ی دیورژانس را برای کره‌ای به شعاع $r = 3$ تحقیق کنید. آیا قضیه‌ی دیورژانس برقرار است؟ چرا؟

*۱۲. میدان برداری $\vec{A} = x^2 y \hat{x} + 2x y \hat{y}$ را در نظر بگیرید. صحت قضیه‌ی استوکس را روی سطح $OMNO$ در شکل زیر بررسی کنید. شعاع کمان $OM=ON=2$ است.

