



تمرین سری دهم - موعد تحویل: شنبه ۱۳۸۷/۹/۳۰

۱. فرض کنید:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0} ; \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} u(ct-r) \hat{r}$$

نشان دهید این میدان‌ها در تمام معادلات ماکسول صدق می‌کنند و ρ و \mathbf{J} را تعیین کنید. ($u(t)$ تابع پله است)

۲. فرض کنید بارهای مغناطیسی آزادی با چگالی ρ_m وجود دارند و یک رابطه‌ی پیوستگی مانند $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$ در موردشان صادق است. جمله‌ی جریان مغناطیسی که در این حالت باید به معادلات ماکسول افزوده شود را بیابید. واحد ρ_m و چگالی جریان مغناطیسی را بیان کنید.

۳. برای اینکه معادله‌ی زیر جوابی از معادله‌ی هلمهولتز سه بعدی باشد چه رابطه‌ای بین ثابتهای آن برقرار باشد؟

$$E_x = C \sinh(K_x x) \sin(K_y y) \sin(K_z z)$$

۴. فرض کنید یک تک‌قطبی مغناطیسی q_m از حلقه سیم بدون مقاومت با خودالقایی L بگذرد، چه جریانی در حلقه القا می‌شود؟

۵. میله‌ای به طول L در یک میدان مغناطیسی عمودی که بصورت $\mathbf{B} = A/z$ تغییر می‌کند با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (میله حول مرکز مختصات می‌چرخد). اختلاف پتانسیل دو سر میله را یک بار با استفاده از تغییرات شار و بار دیگر با محاسبه \mathbf{E} بدست آورید.

۶. * مرکز دایره‌ای به شعاع r در فاصله L از یک سیم طویل قرار دارد. دایره مقاومت R و خاصیت سلفی L دارد. یک جریان پالس ($I = C$ $0 < t < T$) از سیم می‌گذرد. جریان القا شده در سیم را بر حسب زمان بیابید.

۷. الف) * خازنی به ظرفیت C به یک باتری با نیروی محرکه‌ی E_0 و مقاومت درونی صفر وصل می‌کنیم. باتری چه مقدار کار انجام می‌دهد تا خازن کاملاً شارژ شود؟

ب) درون خازن چه مقدار انرژی ذخیره می‌شود؟ آیا با قانون پایستگی انرژی تناقض دارد؟

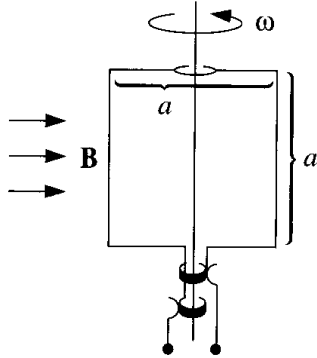
ج) حالا اگر خازن را با مقاومت R به همان باتری وصل کنیم، کل انرژی تلف شده در مقاومت، انرژی ذخیره شده در خازن ($t \rightarrow \infty$) و کار انجام شده توسط باتری چقدر است؟

۸. * دو جسم فلزی در محیطی به رسانندگی σ از هم جدا شده‌اند. نشان دهید که برای مقاومت معادل و خازن معادل بین این دو جسم داریم:

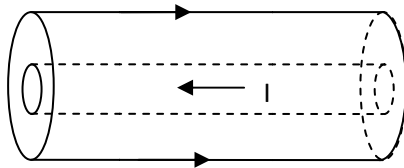
$$R = \frac{\epsilon}{\sigma C}$$

با توجه به این رابطه، اگر بین آنها باتری‌ای با اختلاف V_0 برقرار کنیم و در زمان $t = 0$ باتری را قطع کنیم برای اختلاف پتانسیل بین آنها را بر حسب زمان ($V(t)$) به دست آورید. در چه زمانی به 0.1 ولتاژ اولیه‌ی خود می‌رسد؟ این زمان را برای مس ($\sigma \approx 10^8$ و $\epsilon \approx 10^{-12}$) حساب کنید. اکنون قابل درک است که چه زمانی لازم است تا بار الکتریکی آرایش خود را به گونه‌ای بیابد تا میدان درون رسانا صفر شود.

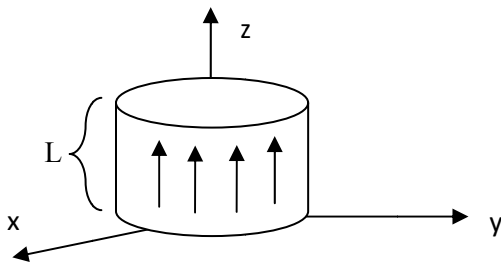
۹. برای حلقه‌ی جریانی که در شکل زیر با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد $E(t)$ دو سر حلقه را به دست آورید (مقاومت سیم را ناچیز بگیرید). اگر یک باتری با $E = \max(E(t))$ به آن وصل کنیم و بدانیم که مقاومت سیم R است، گشتاوری که سیم ایجاد می‌کند $\tau(t)$ را به دست آورید. (سرعت زاویه‌ای را ثابت فرض کنید).



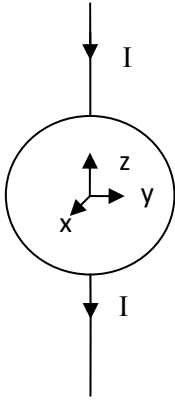
۱۰. با توجه به رابطه‌ی انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی $(E = \int \frac{B^2}{2\mu_0} d^3V)$ و انرژی ذخیره شده در یک القاگر $(E = \frac{1}{2}LI^2)$ می‌توان L را برای بسیاری از آرایش‌ها راحت‌تر از محاسبه‌ی مستقیم به دست آورد. حال یک سیم کوآکسیال (coaxial) در نظر بگیرید به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b (مطابق شکل). فرض کنید از یکی از این سیم‌ها به بار جریان می‌دهیم و از دیگری جریان می‌گیریم. L را برای این مجموعه حساب کنید.



۱۱. با فرض وجود میدان $\mathbf{B} = B_0\hat{a}_r$ در محیط، توان لازم برای دوران پوسته رسانای شکل زیر به اندازه یک دور کامل در جهت \hat{a}_ϕ و با سرعت دورانی N دور در دقیقه بدست آورید. جریان I به طور یکنواخت روی سطح جانبی پوسته در جهت \hat{a}_z جاری است. (شعاع پوسته را a در نظر بگیرید)



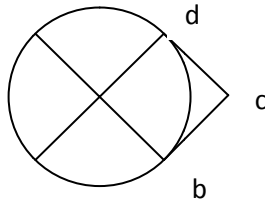
۱۲. * جریان I از یک رشته سیم در امتداد محور Z از $Z=-\infty$ تا $Z=a$ برقرار است و از طریق یک سطح کره به شعاع a به نقطه $Z=-a$ می‌رسد و با یک رشته سیم تا $Z=-\infty$ ادامه می‌یابد. میدان مغناطیسی را در بیرون از کره بدست آورید.



۱۳. اگر میدان مغناطیسی در فضای آزاد برابر باشد با:

$$\vec{H} = \frac{j_0 r}{2\pi} \vec{a}_\varphi, \quad r < a, \quad \vec{H} = \frac{j_0 a^2}{\pi r} \vec{a}_\varphi, \quad r > a$$

مقدار انتگرال $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}$ را روی محیط مربع $obcdo$ را محاسبه کنید.



۱۴. * جریان I به طور یکنواخت در سطح مقطع سیمی طولی توزیع شده است. میدان مغناطیسی را در یک نقطه روی محور Z بدست آورید. سطح مقطع سیم به شکل مثلث متساوی الاضلاع، به شعاع a و مرکز آن روی محور Z است.

