

تمرین سری دوم – موعد تحویل: دوشنبه ۱۳۸۷/۷/۲۹

۱. یک قرص دایره‌ای به شعاع a با مرکز واقع در مبدأ در صفحه‌ی $z = 0$ قرار دارد. چگالی بار سطحی قرص $\sigma = \sigma_0/\rho$ است. میدان الکتریکی را در $z = h$ در راستای محور z تعیین کنید. هنگامی که $h \gg a$ است در مورد میدان بحث کنید.

۲. چگالی‌های باری را که میدان‌های زیر را بر حسب V/m ایجاد می‌کنند، تعیین کنید.

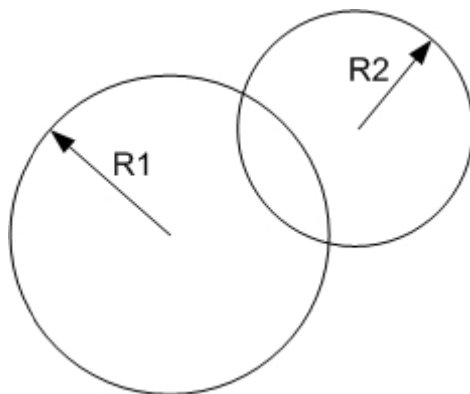
$$\mathbf{E} = 10 \sin \theta \hat{r} + 2 \cos \theta \hat{\theta} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{E} = 0.5 \alpha \left(\rho - \frac{\alpha^2}{\rho} \right) \hat{\rho} \quad a \leq \rho \leq b \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{E} = 0.5 \frac{\alpha}{\rho} (b^2 - a^2) \hat{\rho} \quad \rho > b$$

۳. بر روی مخروط $\theta = \pi/6$ ، $0 < r < 2$ باری با چگالی $\sigma = kr \text{ C/m}^2$ قرار دارد. شدت میدان الکتریکی را در مبدأ مختصات بیابید.

۴. دو کره به شعاع‌های R_1, R_2 به صورتی قرار دارند که فاصله‌ی دو مبدأ از مجموع شعاع‌ها کمتر است. درون کره‌ی A و بیرون کره‌ی B چگالی بار حجمی $+\rho$ و درون کره‌ی B و خارج A چگالی بار حجمی $-\rho$ وجود دارد و فضای مشترک بین کره‌ها خالی از بار است. میدان الکتریکی را در این ناحیه به دست آورید.



۵. یک خط انتقال هم‌محور دارای هادی استوانه‌ای داخلی به شعاع a و هادی استوانه‌ای خارجی به شعاع c است. توزیع بار یکنواخت و چگالی آن بر هادی‌های درونی و بیرونی به ترتیب q_1 و $-q_1$ است. اگر دی‌الکتریک ϵ_1 ، فاصله‌ی $r = a$ تا $r = b$ و دی‌الکتریک ϵ_2 ، فاصله‌ی $r = b$ تا $r = c$ را پر کرده باشد میدان الکتریکی را در $r < a$ ، $a < r < b$ ، $b < r < c$ و $r > c$ بیابید. استوانه‌های هادی را بینهایت نازک فرض کنید. تغییرات D و E را بر حسب شعاع رسم کنید.

۶. یک بار نقطه‌ای q در مبدأ مختصات قرار دارد. بردار میدان الکتریکی را بر حسب مولفه‌های مختصات قائم آن بیان کنید، سپس انتگرال سطحی این میدان را بر روی وجه عمود بر محور x مکعبی به ضلع $2a$ که مرکزش بر مبدأ مختصات منطبق است محاسبه کنید. نشان دهید که قانون گوس برقرار است.

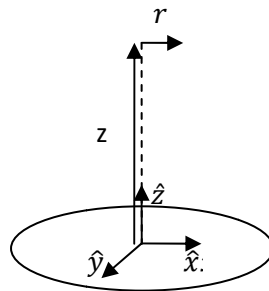
۷. میدان الکتریکی یک حلقه عریض باردار با چگالی سطحی σ و شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 در ارتفاع z بالاتر از مرکز آن را پیدا کنید. آیا برای $R_1 = 0$ و در حد $R_2 \rightarrow \infty$ به جواب معقولی می‌رسیم؟ در حد $R_1 \rightarrow R_2$ و $\sigma(R_2 - R_1) = \lambda$ چطور؟

۸* یک حلقه باردار به شعاع R و چگالی بار خطی λ را در صفحه $x - y$ نظر بگیرید که مرکز آن مرکز مختصات باشد.
 الف) میدان را روی محور حساب کنید.

به دست آوردن جواب تحلیلی کلی این میدان (به ازای هر (r, θ, z)) ممکن نیست. می خواهیم میدان را برای نقاط نزدیک محور تقریب بزنیم، بنابراین در دو قسمت بعدی فرض کنید $r \ll z$:

ب) با استفاده از $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (برای نقاط روی محور) E_r را در نقطه (r, θ, z) حساب کنید.

ج) با استفاده از $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ و قسمت قبل، E_z را در نقطه (r, θ, z) یک مرتبه تصحیح کنید.



۹* در این مسئله می خواهیم نیروی وارد بر دوقطبی‌های الکتریکی در میدان‌های غیر یکنواخت را بررسی کنیم:

الف) یک دوقطبی الکتریکی را در یک میدان الکتریکی غیر یکنواخت در نظر بگیرید (واضح است که در میدان‌های یکنواخت نیروی وارد بر آن صفر است). برای سادگی فرض کنید دو قطبی در راستای محور \hat{x} است. ثابت کنید که نیروی وارد بر آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

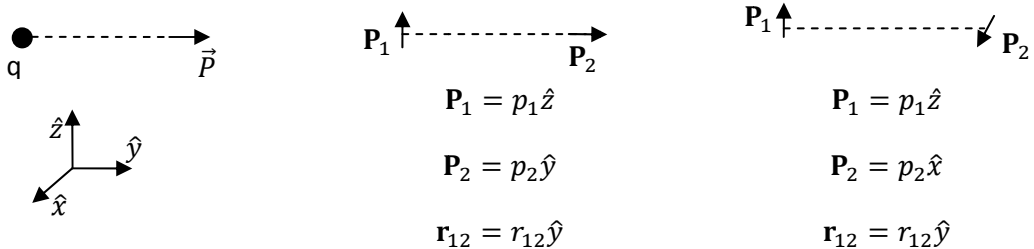
$$\mathbf{F} = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}$$

البته فرض $\mathbf{P} = p\hat{x}$ چیزی از کلیت حل کم نمی‌کند، فقط برای راستای دلخواه دوقطبی ($\mathbf{P} = p\hat{n}$) داریم:

$$\mathbf{F} = p \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

ب) نشان دهید گشتاور وارده بر یک دوقطبی از رابطه $\mathbf{T} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ محاسبه می‌شود.

ج) نیروی وارد بر دوقطبی‌های زیر را حساب کنید:



۱۰. ثابت کنید اگر در قانون کولمب توان r دقیقاً ۲ نباشد، کشیدن خطوط میدان با مشخصاتی که برای آنها در نظر می‌گیریم ممکن نیست. (راهنمایی: برای خطوط میدان یک بار نقطه‌ای چه مشکلی پیش می‌آید؟)

۱۱. کره‌ای به شعاع a با چگالی بار الکتریکی $\rho(r, \theta, \varphi) = \frac{\rho_0}{r}$ مفروض است.

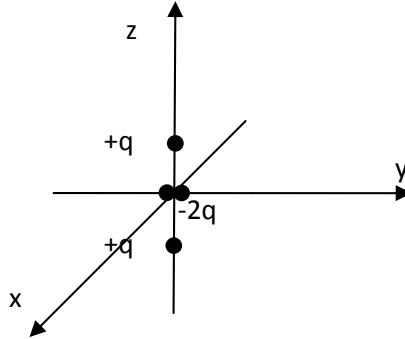
الف) پتانسیل الکتریکی را در تمامی نقاط فضا بدست آورید. $\Phi(r = \infty) = 0$ است.

ب) میدان الکتریکی را در تمامی نقاط فضا بدست آورید.



ج) * آیا در $r = 0$ میدان الکتریکی بی نهایت است؟ و اگر محدود است در این نقطه پیوسته است یا ناپیوسته؟ آیا بی نهایت بودن چگالی بار، محدود بودن و یا پیوسته بودن میدان الکتریکی را نقض می کند؟ در حالت کلی میدان الکتریکی در چه نقاطی می تواند ناپیوسته باشد؟

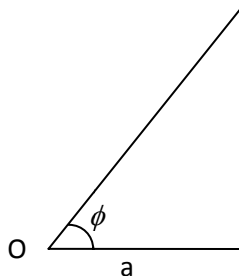
۱۲. * پتانسیل و میدان الکتریکی یک چهارقطبی را در فواصل دور محاسبه کنید و در دستگاه مختصات کروی بیان کنید. (راهنمایی: از تقریب مرتبه دوم بسط تیلور در محاسبات خود صرف نظر نکنید.)



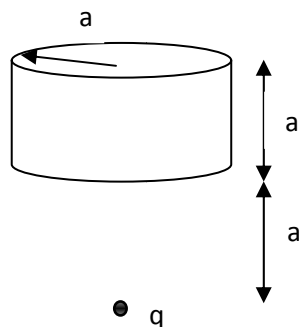
۱۳. فضای بین $-a < z < a$ از بار الکتریکی با چگالی $\rho = \rho_0 \frac{z}{|z|}$ پر شده است. میدان الکتریکی را در تمامی نقاط فضا بدست آورید.

۱۴. * با کمک اتحادهای $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ و $\nabla \times [f(r)\mathbf{r}] = 0$ و مشتق گیری مستقیم برای میدان الکتریکی یک دوقطبی که با تقریب مرسوم بسط تیلور بدست آمده است، نشان دهید که معادله $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ در همه جا غیر از مبدا مختصات برقرار است، یعنی میدان تقریبی دوقطبی سیم لوله ای (Solenoidal) است. آیا این شرط برای میدان دقیق دوقطبی نیز برقرار است؟

۱۵. * سطح مثلث شکل زیر دارای چگالی بار سطحی ρ_s می باشد. پتانسیل الکتریکی را در رأس مثلث (نقطه ی O) بر حسب a و ϕ محاسبه کنید.



۱۶. * شار ناشی از بار نقطه ای q که از سطح جانبی استوانه عبور می کند چقدر است؟





۱۷. * در ناحیه $0 \leq z \leq 2.5$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $1 \leq r \leq 2$ چگالی شار الکتریکی عبارت است از

$$D = \frac{20}{\rho} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) a_\varphi$$

کل بار موجود در ناحیه را به دو روش بیابید.

۱۸. * گشتاور وارد بر دوقطبی ناشی از دو نیم خط باردار با چگالی یکنواخت ρ_l که مطابق شکل در صفحه $z = 0$ واقع شده اند را محاسبه کنید.

