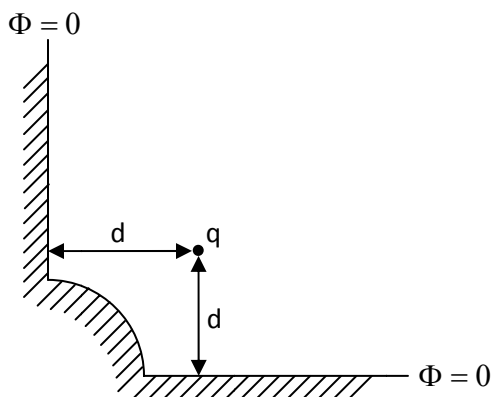


تمرین سری سوم – موعد تحویل: یکشنبه ۱۳۸۷/۸/۵

۱. در ساختار زیر، همان‌طور که مشاهده می‌شود، دو صفحه‌ی فلزی نیم‌بی‌نهایت در راستاهای عمودی و افقی داریم که توسط یک ربع‌استوانه به طول بی‌نهایت به شعاع a به هم متصل هستند و کل سیستم زمین شده است. یک بار q به فاصله‌ی d از دو صفحه قرار می‌دهیم.

الف) تعداد و مکان بارهای تصویری را پیدا کنید

ب) توزیع چگالی بارهای القایی روی هر هادی را بدست آورید.



۲. صفحه‌ی $z = 0$ و نیم‌کره‌ای به شعاع a و به مرکز مبدأ در نیم فضای $z > 0$ از هادی کامل هستند. تابع پتانسیل در فضای بالای این سطح عبارتست از:

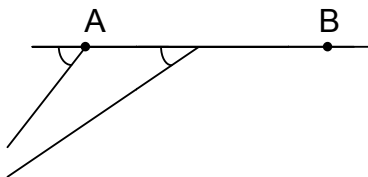
$$V = -r \cos \theta + a^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

چگالی بار روی سطح صاف و روی نیم کره را بیابید و کل بار روی نیم کره را محاسبه کنید.

۳. یک دو قطبی با گشتاور P_1 در مبدأ و یک دو قطبی با گشتاور P_2 در نقطه‌ای با بردار مکانی \mathbf{r} در نظر بگیرید. نیروی بین این دو قطبی‌ها را تعیین کنید. در چه سمت‌گیری از دو قطبی‌ها نیرو کمینه می‌شود؟

۴. دو بار نقطه‌ای $+q$ را که در نقاط A, B قرار دارند در نظر بگیرید. خط میدانانی که با زاویه‌ی θ از بار واقع در A خارج می‌شود در نقاط بسیار دور مجانبی دارد که خط AB را با زاویه‌ی φ قطع می‌کند، نشان دهید:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2}$$



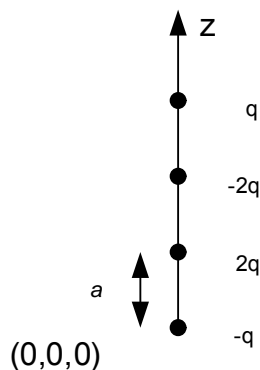
۵. باری روی محور z در فاصله h از ربع صفحه‌ی بی‌نهایت رسانا متصل به زمین قرار گرفته است. (صفحه در $z=0$ و $x>0$ و $y>0$ قرار گرفته است) کل بار سطحی جمع شده را بدست آورید.



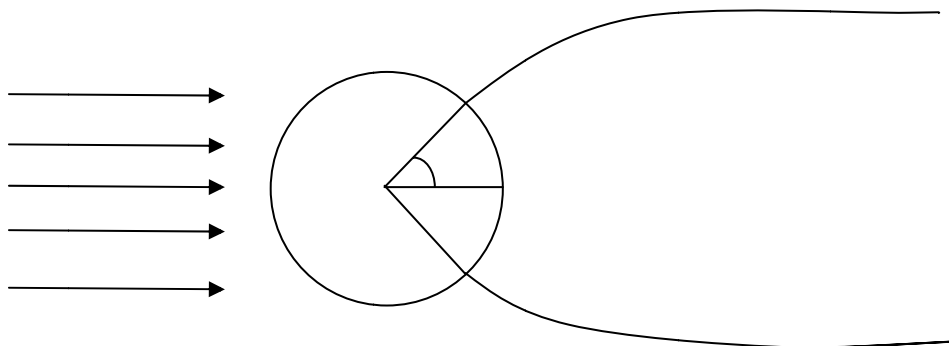
۶. نشان دهید پتانسیل در فواصل دور برای آرایش زیر به صورت زیر است :

$$\frac{6qa^3 P_3(\cos \theta)}{4\pi\epsilon_0 r^4}$$

که در آن $P_3 = (5(\cos \theta)^3 - 3\cos \theta)/2$



۷. کره‌ای رسانا در میدان ثابت E_0 (در کل فضا) قرار گرفته است. خطوط میدانی را که از زاویه θ از سطح کره خارج می‌شوند را در نظر بگیرید. با استفاده از قانون گوس فاصله‌ی آنها را در بی‌نهایت محاسبه کنید.



۸. یک کاسه نیمکره‌ای معکوس شده به شعاع R دارای بار سطحی یکنواخت σ است. اختلاف پتانسیل بین قطب شمال و مرکز آن را بدست آورید.

۹. فرض کنید که پتانسیل الکتریکی یک پیکربندی برای تمام فضا توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$V(\mathbf{r}) = A \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

که در آن A و λ مقادیر ثابت هستند. میدان الکتریکی، چگالی بار و کل بار را محاسبه کنید.

۱۰. نشان دهید برای هر آرایش الکتروستاتیک ناشی از توزیع محدودی از بار داریم:

$$\int_{All\ Space} \nabla \times \left(\frac{\mathbf{E}}{r} \right) dv = 0$$

۱۱. یک ۴ قطبی الکتریکی از یک بار $2q$ - در مبدا و ۲ بار q روی محور z در فاصله l تشکیل شده است.

- (الف) خطوط میدان را رسم کنید
 (ب) خطوط میدان که از بار q بالایی در زاویه خیلی کوچک $\delta\theta$ در جهت بالا و پایین خارج می شوند در چه زاویه $(\delta\theta_1, \delta\theta_2)$ روی $2q$ - فرود می آیند؟
 (ج) میدان الکتریکی ناشی از این ۴ قطبی روی محور z چه قدر است؟

۱۲. * در این مسئله می خواهیم ثابت کنیم اگر در ناحیه ای از فضا معادله لاپلاس برآورده شود $\nabla^2 V = 0$ و روی مرز ناحیه صفر باشد، V درون آن ناحیه هم صفر است.

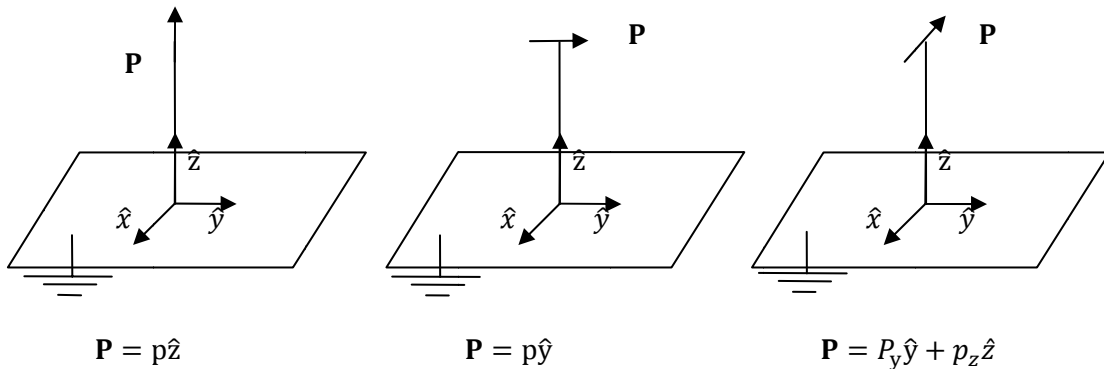
- (الف) یک کره به شعاع R با چگالی بار یکنواخت σ و مرکز مبدا مختصات در نظر بگیرید. بار نقطه ای q در فاصله d از آن قرار دارد. انرژی پتانسیل الکتریکی این مجموعه چقدر است؟
 (ب) با توجه به قسمت قبل میانگین پتانسیل ناشی از بار نقطه ای روی سطح کره چقدر است؟ پتانسیل در مرکز چطور؟
 (ج) نشان دهید که اگر در ناحیه ای از فضا بار الکتریکی وجود نداشته باشد $(\nabla \cdot \vec{E} = 0)$ ، هیچ پتانسیل ماکزیمم یا مینیمم موضعی داخل آن ناحیه وجود ندارد. آیا قضیه ای که می خواستیم را ثابت کردیم؟
 (د) حالا قضیه اول یکتایی جواب را اثبات کنید: اگر پتانسیل روی مرز یک ناحیه و چگالی بار داخل آن داده شده باشد، پتانسیل تمام نقاط درون منحنی به طور یکتا به دست می آید

(با استفاده از برهان خلف فرض کنید دو جواب وجود داشته باشد: و آنگاه تابع

$$\begin{cases} \nabla^2 V_1 = \nabla^2 V_2 = \rho/\epsilon_0 \\ V_1 = V_2; \text{ روی مرز} \end{cases}$$

$$V_3 = V_2 - V_1 \text{ را بررسی کنید}$$

۱۳. نیروی وارد بر دو قطبی های زیر را بیابید:



۱۴. * در این مسئله حل توزیع میدان ما بین استوانه های فلزی را به روش تبدیل مختصات مطالعه می کنیم. دستگاه مختصات متعامد دوقطبی استوانه ای (Cylindrical Bipolar Coordinates) به صورت زیر تعریف می شود:

$$x = a \frac{\sinh u}{\cosh u - \cos t}, \quad y = a \frac{\sin t}{\cosh u - \cos t}, \quad z = z$$

(الف) معادله سطوح u و t ثابت را بیابید و ترسیم کنید.



(ب) نشان دهید

$$h_u = h_t = \frac{a}{\cosh u - \cos t}, \quad h_z = 1$$

(ج) دو استوانه‌ی رسانا با محورهای موازی و با فاصله d ما بین محورها و شعاع‌های r_1 و r_2 مفروض است، به گونه‌ای که $d > r_1 + r_2$. اگر استوانه‌ها به ترتیب دارای بارهای بر واحد طول ρ_l و $-\rho_l$ باشند به کمک دستگاه مختصات فوق، میدان را در خارج از استوانه‌ها محاسبه کرده و از آنجا ظرفیت خازنی بر واحد طول را بدست آورید. (راهنمایی: ثابت a را تعیین نموده و سپس اقدام به حل مسئله نمایید)