

تمرین اول میدان ها و امواج - گروه دکتر رجایی

“Make everything as simple as possible, but not simpler,” Albert Einstein.

1- نشان دهید روابط ذیل در پیمانه ی لورنتس برقرار است، که در آن $D = \epsilon_0 E + P$ ، $B = \mu_0 E + \mu_0 M$ ، و c سرعت نور در خلا است:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu_0 J - \mu_0 \frac{\partial P}{\partial t} - \mu_0 \nabla \times M$$

2- پتانسیل های الکتریکی اسکالر φ و مغناطیسی برداری A در پیمانه ی لورنتس به دست آمده اند. حال، آن دو را به ترتیب به $\varphi' = \varphi + \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ و $A' = A - \alpha \nabla \Lambda$ تبدیل می کنیم، که α و Λ توابعی مشتق پذیرند. شرط لازم و کافی روی α و Λ ، برای اینکه تبدیل مذکور، یک تبدیل پیمانه ای معتبر باشد، چیست؟

3- توزیعی از بارها و جریان های الکتریکی در خلا وجود دارد که به میدان های $E(\vec{r}, t)$ و $H(\vec{r}, t)$ منجر شده است. در هر یک از حالات ذیل، در دستگاه مشاهده ی پریم دار، میدان های $E'(\vec{r}', t')$ و $H'(\vec{r}', t')$ را بر حسب $E(\vec{r}, t)$ و $H(\vec{r}, t)$ بیان کنید:

$$\text{حالت اول) } t' = t \text{ و } \vec{r}' = -\vec{r}$$

$$\text{حالت دوم) } t' = -t \text{ و } \vec{r}' = \vec{r}$$

4- دو صفحه ی بینهایت نازک، یکسان، موازی، و دایروی به شعاع a از هادی ایده آل، در فاصله ی D از یکدیگر قرار دارند. حال، خازن تشکیل شده را با دو سیم از هادی ایده آل به منبع ولتاژ $V = \text{Re}(V_0 e^{j\omega_0 t}) = V_0 \cos(\omega_0 t)$ وصل می کنیم. فرض کنید سیم ها صاف هستند و به مراکز صفحات عمود شده اند، و در نتیجه منبع ولتاژ در فاصله ی بسیار دور قرار دارد. همچنین فرض کنید D آنقدر کوچک است که میدان الکتریکی در ناحیه ی میان صفحات، یکنواخت، و خارج آن، صفر است. میدان مغناطیسی در کل فضا (شامل ناحیه ی میان صفحات و ناحیه ی خارجی)، و نیز چگالی جریان J_s روی صفحات را **بدون** استفاده از شرط مرزی $\hat{n} \times (H_2 - H_1) = J_s$ بیابید. سپس نشان دهید شرط مرزی مذکور، روی صفحات برقرار است.

5- ساختار مطرح شده در پرسش قبل را در نظر بگیرید. همچنان فرض کنید میدان الکتریکی در ناحیه ی خارج خازن صفر است. اما این بار، از تقریب یکنواخت بودن میدان الکتریکی در ناحیه ی میان صفحات، **استفاده نمی کنیم**. نشان دهید در فرکانس های به اندازه ی کافی کوچک ω_0 ، می توان ساختار مذکور را معادل سری شده ی یک خازن و یک سلف فشرده (lumped) دانست. مقدار خازن و سلف را به دست آورید.

راهنمایی ۱- برای تحلیل ساده تر، فرض کنید به جای منبع ولتاژ، از منبع جریان $I = \text{Re}(I_0 e^{j\omega_0 t}) = I_0 \cos(\omega_0 t)$ استفاده می کنیم.

راهنمایی ۲- میدان ها، و از روی آن ها، متوسط زمانی انرژی های الکتریکی و مغناطیسی ذخیره شده در سیستم را حساب کنید.

خوش باشید، امیر جزایری