

تمرین دوم میدان ها و امواج - گروه دکتر رجایی

“Don't let schooling interfere with your education,” Mark Twain.

از این پس، در تمام تمرین ها، تنها زمانی علامت بردار روی یک کمیت برداری گذاشته می شود، که عدم استفاده از آن، ایجاد ابهام می کند.

1- دو صفحه ی بینهایت نازک، یکسان، موازی، و دایروی به شعاع a از هادی ایده آل، در فاصله ی D از یکدیگر قرار دارند. حال، خازن تشکیل شده را با دو سیم از هادی ایده آل به منبع جریان ثابت در زمان I_{dc} وصل می کنیم. فرض کنید سیم ها صاف هستند و به مراکز صفحات عمود شده اند، و در نتیجه منبع جریان در فاصله ی بسیار دور قرار دارد. همچنین فرض کنید D آنقدر کوچک است که میدان الکتریکی در ناحیه ی میان صفحات، یکنواخت، و خارج آن، صفر است. با استفاده از بردار پوینتینگ، نشان دهید نرخ ورود انرژی به خازن مذکور، برابر با نرخ افزایش انرژی الکتروستاتیکی آن است.

2- سیمولوله ای ایده آل به شعاع a و N دور در واحد طول، حامل جریانی به شکل $I(t) = Kt$ است (K عدد ثابت است). با استفاده از بردار پوینتینگ، نشان دهید نرخ ورود انرژی به حجمی از سیمولوله به طول L برابر با تغییر انرژی مگنتوستاتیکی آن است.

در سوال های بعد، میدان های واقعی، برابر جزء حقیقی عبارات به کار رفته، هستند. با این کار، یعنی بررسی در یک فرکانس زمانی، پاسخ زمانی محیط که به صورت یک کانولوشن زمانی مدل می شود ($\epsilon(t)$ ، $\mu(t)$ ، و $\sigma(t)$)، به عنوان پاسخ ضربه ی یک سیستم LTI، به صورت یک ضرب معمولی در حوزه ی فرکانس ($\epsilon(\omega)$ ، $\mu(\omega)$ ، و $\sigma(\omega)$) درمی آید. نمونه ی این مدل سازی، در متن کتاب چنگ، برای پلاسما آورده شده است.

دقت کنید به دلیل علی بودن $\epsilon(t)$ ، $\mu(t)$ ، و $\sigma(t)$ ، بدیهی است که $\epsilon(\omega)$ ، $\mu(\omega)$ ، و $\sigma(\omega)$ مختلط هستند، مگر اینکه یک عدد ثابت مستقل از فرکانس باشند. اما در هر صورت، چه تابعیت از فرکانس وجود داشته باشد، و چه از آن صرف نظر کنیم، در این درس، از این پس، منظور از ϵ ، μ ، و σ ، به ترتیب $\epsilon(\omega)$ ، $\mu(\omega)$ ، و $\sigma(\omega)$ خواهد بود.

3- فرض کنید در محیطی با ϵ ، μ ، و σ ، میدان های $E = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ و $H = H_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ وجود دارد که E_0 و H_0 ، هر کدام، برداری ثابت در مکان با سه درایه ی مختلط است.

الف) رابطه ی بین E_0 و H_0 چیست؟

ب) رابطه ی بین \vec{k} و ω چیست؟

ج) میدان ها در حالت خاص $\vec{k} = k \hat{n}$ که \hat{n} بردار یکه با درایه های حقیقی است، بعد از چه طولی از انتشار، ضرب در $1/e$ می شوند؟

4- در ادامه ی درس خواهیم دید که درون موجبر فلزی، با ساختار یکنواخت در راستای \hat{z} ، و با سطح مقطع مستطیلی به ابعاد a

در راستای \hat{x} و b در راستای \hat{y} ، اگر فرکانس ω از حدی بیشتر باشد، میدان انتشاری به فرم $E = \hat{y} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{j\omega t - j\beta_n z}$

در آن مجاز است که n عددی طبیعی است. β_n ، میدان مغناطیسی، و توان انتشاری در موجبر را به دست آورید.

5- ماده ای با رسانندگی صفر و نفوذپذیری μ_0 مفروض است که گذردهی آن به وسیله ی ماتریس $[\mathcal{E}] = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$ تعریف

می شود؛ یعنی $\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = [\mathcal{E}] \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$. فرض کنید میدان های $E = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = (E_x, E_y, E_z)$ و $H = H_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

در آن محیط مجاز باشد که E_0 و H_0 ، و $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ، هر کدام، برداری ثابت در مکان با سه درایه ی مختلط است.

الف) با استفاده از معادلات ماکسول، نشان دهید $\vec{k} \cdot D = 0$ ، $\vec{k} \cdot H = 0$ ، و

$$\vec{k} \cdot E = \frac{E_x}{k_x} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x) = \frac{E_y}{k_y} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_y) = \frac{E_z}{k_z} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_z)$$

که c سرعت نور در خلا است.

ب) در حالت خاص $\vec{k} = k \hat{n}$ که \hat{n} بردار یکه با درایه های حقیقی است، با استفاده از قسمت الف، استدلال کنید که به ازای فرکانس مشخص ω و بردار داده شده ی \hat{n} ، دو مقدار مجاز برای k وجود دارد (دقت کنید در سؤال ۳ قسمت ج، اولاً یک مقدار مجاز برای k داریم، و ثانیاً مقدار مذکور به \hat{n} وابسته نیست).

ج) این قسمت سؤال را تحویل ندهید. در ادامه ی قسمت قبل، آیا می توانید نشان دهید که اگر عناصر ماتریس $[\mathcal{E}]$ حقیقی باشند، به ازای فرکانس مشخص ω و بردار داده شده ی \hat{n} ، مقادیر k حتماً حقیقی اند؟

خوش باشید، امیر جزایری