

## تمرین دوم میدان ها و امواج - گروه دکتر رجایی

“Do not take life too seriously - you will never get out of it alive,” Elbert Hubbard.

توضیح مشترک در مورد همه سوالات:

- محیط ها غیرمغناطیسی هستند؛ یعنی  $\mu = \mu_0$ .

- در مسائلی که در آنها صحبت از دو یا چند محیط شده است، مرز مشترک دو محیط مجاور را صفحه ای با ابعاد بینهایت و موازی صفحه ی  $x-y$  تشکیل می دهد، که روی آن بار و جریان سطحی وجود ندارد.

- در مسائلی که در آنها صحبت از موج تابشی شده است، موج تابشی یک موج تخت یکنواخت و انتشاری است که بردار موج آن در صفحه ی  $x-z$  قرار می گیرد.

1- دو محیط با رسانندگی صفر و ضرایب گذردهی حقیقی مثبت  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$  مفروض است. موج تابشی در محیط اول با زاویه ی تابش به اندازه کافی بزرگ  $\theta$  به مرز مشترک می تابد به نحوی که بازتاب کلی رخ دهد ( $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ). میدان الکتریکی تابشی در راستای  $\hat{y}$  است. متوسط زمانی بردار پوینتینگ را در محیط دوم به دست آورید.

2- محیط اول، خلا است. محیط دوم، رسانندگی  $\sigma$  و گذردهی  $\epsilon$  دارد که  $\sigma$  و  $\epsilon$  اعداد حقیقی مثبت هستند. موج تابشی با زاویه ی تابش صفر (تابش عمودی) به مرز مشترک می تابد. در حد رسانای خوب، یعنی  $\lambda_0 \ll \delta$ ، نشان دهید نسبت دامنه مختلط میدان الکتریکی موج بازتابیده نسبت به موج تابشی در مرز مشترک برابر با  $(1 - k_0 \delta) e^{j(\pi - k_0 \delta)}$  است ( $\delta = \sqrt{2 / (\omega \mu_0 \sigma)}$ ) و  $k_0 = 2\pi / \lambda_0 = \omega / c$  به ترتیب عمق نفوذ محیط دوم و ثابت انتشار در خلا هستند).

3- ساختاری متشکل از چند لایه دی الکتریک فرض کنید که در خلا قرار گرفته است. لایه  $n$  ام با  $\epsilon_n$  و  $\sigma_n$  خاص خود توصیف می شود، و ضخامت  $d_n$  دارد. فرض کنید موج تابشی با زاویه ی تابش  $\theta$  به لایه اول می تابد، و میدان الکتریکی آن در راستای  $\hat{y}$  است. مقادیر مؤلفه های  $E_y$  و  $H_x$  را در مرز مشترک لایه های  $n$  ام و  $n+1$  ام بر حسب مقادیر مؤلفه های مذکور در مرز مشترک لایه های  $n$  ام و  $n-1$  ام به دست آورید.

راهنمایی- پاسخ تنها به  $\theta$  و مشخصات لایه  $n$  ام وابسته است.

4- ساختاری متشکل از دو محیط فرض کنید. محیط اول خلا است، و محیط دوم رسانندگی صفر و گذردهی  $\epsilon$  دارد که  $\epsilon$  عدد حقیقی منفی است. در این مساله، موج تابشی وجود ندارد. مشابه استدلالی که در مورد موج تخت به عنوان یک فرم مجاز میدان در فضای آزاد می کنید، حال در این مساله ببینید آیا مجاز است که میدان در هر یک از دو ناحیه ی مذکور امواج تختی باشد که در راستای محور  $x$  منتشر می شوند، اما در راستای محور  $z$  وقتی از مرز مشترک دور می شویم محو می گردند. در هر یک از دو حالت که میدان الکتریکی در راستای  $\hat{y}$  و در صفحه  $x-z$  باشد، پاسخ دهید.

5- محیطی با رسانندگی صفر مفروض است که گذردهی آن به وسیله ماتریس  $[\mathcal{E}] = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$  تعریف می شود؛ یعنی

$$\text{در } H = H_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = (H_x, H_y, H_z) \text{ و } E = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = (E_x, E_y, E_z) \text{ های میدان های } \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = [\mathcal{E}] \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

این محیط مجاز باشد که  $E_0$  و  $H_0$ ، و  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ، هر کدام، برداری ثابت در مکان با سه درایه ی مختلط است:

الف) با استفاده از معادلات ماکسول، نشان دهید  $\vec{k} \cdot D = 0$ ،  $\vec{k} \cdot H = 0$  و

$$\vec{k} \cdot E = \frac{E_x}{k_x} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_x) = \frac{E_y}{k_y} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_y) = \frac{E_z}{k_z} (\vec{k} \cdot \vec{k} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_z)$$

که  $c$  سرعت نور در خلا است.

ب) در حالت خاص که  $\vec{k} = k \hat{n}$  و یک بردار یکه داده شده با درایه های حقیقی است، با استفاده از قسمت الف، استدلال کنید که در

فرکانس مشخص  $\omega$ ، دو مقدار مجاز برای  $k$  وجود دارد

راهنمایی - منطق حل مشابه حل سؤال ۳ تمرین سری قبل است، و صرفاً نتایج تفاوت دارد (آنجا یک مقدار مجاز برای  $k$  داریم، و مقدار مذکور به

$\hat{n}$  وابسته نیست).

**این مساله را تحویل ندهید:**

$$\text{محیطی با رسانندگی صفر مفروض است که گذردهی آن به وسیله ماتریس } [\mathcal{E}] = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & j\alpha & 0 \\ -j\alpha & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

تعریف می شود که  $\varepsilon_1$ ،  $\varepsilon_2$ ، و  $\alpha$ ، اعداد حقیقی هستند.

الف) نشان دهید در فرکانس  $\omega$  امواج تختی که در این ماده در راستای  $\hat{z}$  منتشر می شوند، تنها می توانند پلاریزاسیون دایروی راستگرد یا

دایروی چپگرد داشته باشند. سرعت انتشار هر یک از این دو نوع موج تخت را به دست آورید.

ب) آیا فازور میدان الکتریکی به فرم  $\hat{z} e^{-j(k_x x + k_y y)}$  در فرکانس  $\omega$  مجاز است؟ (اگر مجاز است، میدان مغناطیسی را حساب کنید)

ج) آیا فازور میدان مغناطیسی به فرم  $\hat{z} e^{-j(k_x x + k_y y)}$  در فرکانس  $\omega$  مجاز است؟ (اگر مجاز است، میدان الکتریکی را حساب کنید)

شاد باشید

امیر جزایری