

تمرین سوم میدان ها و امواج - گروه دکتر رجایی

“Plato is dear to me, but dearer still is truth,” Aristotle.

توضیحات مشترک و بسیار مهم در مورد همه ی سوالات:

- محیط ها غیرمغناطیسی هستند، یعنی  $\mu = \mu_0$ .

- مرز مشترک دو محیط مجاور را، صفحه ای با ابعاد بینهایت و موازی صفحه ی  $x-y$  تشکیل می دهد، که روی آن بار و جریان سطحی وجود ندارد.

- میدان های تابشی، در صورت وجود، میدان های یک موج تخت یکنواخت و انتشاری هستند که بردار موج آن، در صفحه ی  $x-z$  قرار می گیرد.

1- دو محیط با رسانندگی صفر و ضرایب گذردهی حقیقی مثبت  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$ ، مفروض است. موج تابشی در محیط اول، با زاویه ی تابش به اندازه ی کافی بزرگ  $\theta$ ، به مرز مشترک می تابد به نحوی که بازتاب کلی رخ دهد ( $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ). میدان الکتریکی تابشی، در راستای  $\hat{z}$  است. متوسط زمانی بردار پوینتینگ را در محیط دوم به دست آورید.

2- محیط اول، خلا است. محیط دوم، رسانندگی  $\sigma$  و گذردهی  $\epsilon$  دارد که  $\sigma$  و  $\epsilon$  اعداد حقیقی مثبت هستند (دقت کنید که از لحاظ ریاضی، در معادلات ماکسول می توانیم جزء موهومی  $\epsilon$  را در جزء حقیقی  $\sigma$  بگنجانیم. به این سبب است که  $\epsilon$  را حقیقی فرض کردیم). موج تابشی با زاویه ی تابش صفر (تابش عمودی) به مرز مشترک می تابد. در حد رسانای خوب، یعنی  $\delta \ll \lambda_0$ ، نشان دهید نسبت دامنه مختلط میدان الکتریکی موج بازتابیده نسبت به موج تابشی در مرز مشترک، برابر با  $(1 - k_0 \delta) e^{i(\pi - k_0 \delta)}$  است ( $k_0 = 2\pi / \lambda_0$  و  $\lambda_0 = \omega / c$ ،  $\delta = \sqrt{2 / (\omega \mu_0 \sigma)}$ ) خلا هستند).

3- دو محیط با رسانندگی صفر و ضرایب گذردهی حقیقی مثبت  $\epsilon_1$  و  $\epsilon_2$ ، مفروض است. می دانید اگر میدان الکتریکی تابشی در راستای  $\hat{z}$  باشد، و  $R$  و  $T$  را به ترتیب برابر نسبت دامنه ی مختلط میدان الکتریکی بازتابیده و انتقالی به تابشی در مرز مشترک فرض کنیم، خواهیم داشت  $T - R = 1$  و  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ .

الف) مفهوم دو رابطه ی مذکور چیست؟

ب) حال فرض کنید پلاریزاسیون میدان الکتریکی تابشی در صفحه ی  $x-z$  باشد. سه حالت مختلف را برای تعریف  $R$  و  $T$  در نظر بگیرید که عبارتند از نسبت دامنه ی مختلط  $E_x$  ها،  $E_z$  ها، و  $H_y$  ها. بدون حل کامل مساله و محاسبات، استدلال کنید که در هر حالت از سه نوع تعریف مذکور، روابط  $T - R = 1$  و  $|R|^2 + |T|^2 = 1$  برقرارند یا نه.

4- ساختاری متشکل از  $N + 2$  ماده فرض کنید، که هر یک با  $\epsilon_n$  و  $\sigma_n$  خاص خود توصیف می شود. ناحیه ی اول و آخر، به ترتیب نواحی موج تابشی/بازتابشی و انتقالی هستند. هر یک از سایر نواحی، عرض  $d_n$  مخصوص به خود را دارد. فرض کنید میدان الکتریکی تابشی در راستای  $\hat{z}$  است. به صورت سیستماتیک، با ذکر روابط لازم برای یک ناحیه ی دلخواه، توضیح دهید که امواج بازتابیده و انتقالی از کل ساختار چگونه به دست می آیند.

5- ساختاری متشکل از دو محیط فرض کنید که محیط اول، خلا است، و محیط دوم، رسانندگی صفر و گذردهی  $\epsilon$  دارد که عدد حقیقی منفی است. در این مساله، تحریک (موج تابشی) وجود ندارد. همانگونه که قبلا در مورد یک موج تخت، به عنوان یک فرم

مجاز میدان در فضای آزاد صحبت شد، حال می خواهیم ببینیم آیا مجاز است که میدان در هر یک از دو ناحیه ی مذکور، به فرم امواج تختی باشد که در راستای  $\hat{x}$  منتشر می شوند، اما در راستای  $\hat{z}$  وقتی از مرز مشترک دور می شویم محو می گردند. در هر یک از دو حالت که میدان الکتریکی در راستای  $\hat{r}$  و در صفحه ی  $x-z$  باشد، پاسخ دهید.

6- ماده ای با رسانندگی صفر در نظر بگیرید که گذردهی آن توسط ماتریس 
$$[\epsilon] = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_1 & j\alpha & 0 \\ -j\alpha & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$
 داده می شود (

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = [\epsilon] \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

که  $\epsilon_1$ ،  $\epsilon_2$  و  $\alpha$ ، اعداد حقیقی هستند.

الف) نشان دهید امواج تختی که در این ماده در راستای  $\hat{z}$  منتشر می شوند، تنها می توانند پلاریزاسیون دایروی راستگرد یا دایروی چپگرد داشته باشند. سرعت انتشار هر یک از این دو نوع موج تخت را به دست بیاورید.

ب) ساختاری متشکل از دو ناحیه فرض کنید، که ناحیه ی اول خلا، و ناحیه دوم از ماده ی مذکور است. فرض کنید موج تابشی با زاویه ی تابش صفر (تابش عمودی) از ناحیه اول به مرز مشترک می تابد و میدان الکتریکی آن در راستای  $\hat{r}$  است. میدان های بازتابی و انتقالی را به دست آورید.

خوش باشید، امیر جزایری