

تمرین اول میدان ها و امواج - گروه دکتر رجایی

“Information is not knowledge,” Albert Einstein.

در تمرین این سری و سری های بعد، زمانی علامت بردار روی یک کمیت برداری گذاشته می شود که نبود آن ایجاد ابهام کند. همچنین، اگر جایی صحبت از یک تک فرکانس ω شود، آنگاه ε ، μ ، و σ ، به معنای $\varepsilon(\omega)$ ، $\mu(\omega)$ ، و $\sigma(\omega)$ خواهد بود (یعنی مقدار تبدیل فوریه پاسخ ضربه سیستم در فرکانس ω)

1- دو صفحه دایروی به شعاع a از رسانای ایده آل، در فاصله D از یکدیگر قرار دارند، به نحوی که خط واصل مراکز صفحات به صفحات عمود است. خازن تشکیل شده با دو سیم از هادی ایده آل به منبع جریان $I = \text{Re}(I_0 e^{j\omega_0 t})$ وصل شده است. سیم ها صاف هستند و به مراکز صفحات عمود شده اند (در نتیجه منبع جریان در فاصله ی بسیار دور قرار دارد). برای سادگی فرض کنید میدان الکتریکی در ناحیه میان صفحات، یکنواخت، و خارج آن، صفر است. میدان مغناطیسی را در کل فضا (شامل ناحیه میان صفحات و ناحیه خارجی)، و نیز چگالی جریان J_s روی صفحات را **بدون** استفاده از شرط مرزی $J_s = \hat{n} \times (H_2 - H_1)$ بیابید. سپس نشان دهید شرط مرزی مذکور، روی صفحات برقرار است. راهنمایی- چون فرض کردیم میدان الکتریکی در ناحیه ی میان صفحات یکنواخت است، کرل آن صفر است و پتانسیل به مفهوم الکتروستاتیکی اینجا هم قابل تعریف می شود. در نتیجه، در هر لحظه از زمان، هر یک از صفحات دایروی یک سطح هم پتانسیل است. با توجه به منبع تک فرکانس، اختلاف پتانسیل بین صفحات به فرم $V = \text{Re}(V_0 e^{j\omega_0 t})$ خواهد بود.

2- پاسخ عمومی $f(\rho)$ را بیابید به شرطی که $\psi = (Ae^{j\beta z} + Be^{-j\beta z})(Ce^{jm\varphi} + Be^{-jm\varphi})f(\rho)$ پاسخ عمومی معادله هلمهلتز (یعنی $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$) در دستگاه مختصات استوانه ای باشد. A ، B ، C ، و D ضرایب دلخواهند، k و β اعداد داده شده هستند، و $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$

در مورد حالت خاص $\psi = (Ae^{jkz} + Be^{-jkz})f(\rho)$ بحث کنید.

3- فرض کنید در محیطی با ε ، μ ، و σ ، میدان های $E = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ و $H = H_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ وجود دارد که E_0 و H_0 ، و \vec{k} ، هر کدام، برداری ثابت در مکان با سه درایه ی مختلط است.

الف) رابطه ی بین E_0 و H_0 چیست؟

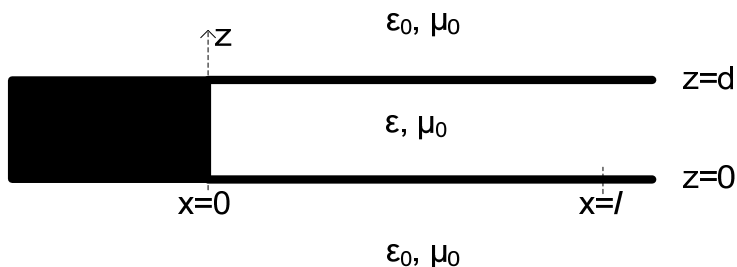
ب) رابطه ی بین \vec{k} و ω چیست؟

4- سیمولوه ای ایده آل به شعاع a و N دور در واحد طول، حامل جریان $I(t) = Kt$ است (K عدد ثابت است). با استفاده از بردار پوینتینگ، نشان دهید نرخ ورود انرژی به حجمی از سیمولوه به طول L برابر با تغییر انرژی مغناطیسی ذخیره شده در آن است.

5- شکل ذیل دو نیم-صفحه موازی رسانای ایده آل را نشان می دهد که در فاصله d از یکدیگر قرار دارند، در راستای y از دو طرف بینهایت بلند هستند، و سمت چپ آنها نیز یک رسانای ایده آل است. فضای میان صفحات از عایقی غیر مغناطیسی با ضریب گذردهی حقیقی و مثبت ε پر شده است. در فواصل دور ($x \rightarrow +\infty$)، منبع جریانی وجود دارد که سبب شده چگالی جریان سطحی $\text{Re}(-\hat{x} J_s e^{j\omega t})$ در $x=l$ از

صفحه بالایی و چگالی جریان سطحی $\text{Re}(\hat{x}J_{s_0} e^{j\omega t})$ در $x=l$ از صفحه پایینی عبور کند (J_{s_0} تابع y نیست و یک عدد داده شده است).

برای سادگی فرض کنید مؤلفه های \hat{x} و \hat{y} از میدان الکتریکی در فضای میان صفحات صفر است. غیر از این مورد، هیچ فرض دیگری قابل قبول نیست، مگر اینکه اثبات شود.



الف) با استفاده از معادلات ماکسول و شرایط مرزی، میدان ها را در ناحیه میان صفحات به دست آورید.

ب) متوسط زمانی انرژی الکتریکی ذخیره شده، و متوسط زمانی انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ناحیه $\{0 < z < d, 0 < y < b, 0 < x < l\}$ را بیابید.

ج) با استفاده از قسمت (ب)، خازن و سلفی را بیابید که سری شده آن ها از دید منبع جریان، معادل ناحیه $\{0 < z < d, 0 < y < b, 0 < x < l\}$ عمل می کند. دقت کنید مقادیر خازن و سلف، تابع فرکانس خواهند بود.

د) در فرکانس های به اندازه کافی کوچک، امپدانس محاسبه شده در قسمت (ج) را با سری شده یک خازن و یک سلف (با مقادیر غیر وابسته به فرکانس) تقریب بزنید.

مسائل ذیل را تحویل ندهید:

1- فرض کنید یک مساله الکترومغناطیس حل شده و میدان ها به دست آمده اند. همچنین فرض کنید که در پیمانه لورنتز، پتانسیل های الکتریکی

اسکالر φ و مغناطیسی برداری A به دست می آیند. حال اگر این دو را به ترتیب به $\varphi' = \varphi + \alpha \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$ و $A' = A - \alpha \nabla \Lambda$ تبدیل کنیم

Λ و α توابعی مشتق پذیرند، شرط لازم و کافی روی Λ و α را بیابید به نحوی که تبدیل مذکور یک تبدیل پیمانه ای معتبر باشد.

2- توزیعی از بارها و جریان های الکتریکی در خلا وجود دارد که به میدان های $E(\vec{r}, t)$ و $H(\vec{r}, t)$ منجر شده است. در هر یک از حالات

ذیل، در دستگاه مشاهده ی پریم دار، میدان های $E'(\vec{r}', t')$ و $H'(\vec{r}', t')$ را بر حسب $E(\vec{r}, t)$ و $H(\vec{r}, t)$ بیان کنید، با فرض اینکه

معادلات ماکسول در دستگاه پریم دار برقرار هستند:

$$\text{حالت اول) } \vec{r}' = -\vec{r} \text{ و } t' = t$$

$$\text{حالت دوم) } \vec{r}' = \vec{r} \text{ و } t' = -t$$