فصل اول

خطاي اندازه گيري و بررسي آماري آن

مطالب :

- ←١. مفهوم خطا، دقت و رقم معني دار
- ٢. انواع خطا
- ٣. بررسي آماري خطا
- ۴. خطاهاي حدي و تركيب آنها
- ۵. تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد

۱ـ مفهوم خطا(**Error**) ، صحت (**Accuracy**)، دقت(**Precision**) ، رقم معني دار, قدرت تفکیک :

- هيچ اندازه گيري خالي از خطا نيست ولي مهم اين است كه بدانيم چه چيزهاي منشا خطا ميشوند و چگونه بايد با آنها برخورد كنيم. ممكن است دو نفر از روش اندازه گيري مشابه و دستگاه هاي مشابه استفاده كنند ولي يكي نتايج بسيار بهتري را بدست آورد. پس لازم است با خطا و عوامل بوجود آورنده آن آشنا شويم.
- خطا **Error** : تفاوت مقدار اندازه گيري شده با مقدار واقعي.
- دقت **Precision**: نزديك بودن مقادير اندازه گيري شده به هم.
- صحت**Accuracy** : نزديك بودن مقادير اندازه گيري شده به مقدار واقعي.

- در کاربرد روز مره دقت و صحت به یک معني به کار میروند امـا در اندازه گیري دو معناي متفاوت دارند. دقت معیاري از قابلیـت تکـرار اندازه گیري است. هر چه نتایج اندازه گیري مختلف از یک کمیت به هم نزدیکتر باشند(تطابق بیشتري داشته باشند و پراکنـدگي کمتـر) میگوییم دقیقتر است. در حالي که صحت به معناي نزدیکـي مقـدار اندازه گیري شده به مقدار واقعي است.
- پس اگر اندازه گیري صحت زیادي داشته باشد دقت هم زیاد خواهد بود اما عکس آن همواره صادق نیست. پـس دقـت شـرط لازم بـراي صحت است.

- مثلا آمپرمتري با تقسيمات ريز که بتواند تغييرات يک ميکرو آمپـر را هم تشخيص دهد را در نظر بگيريد که مقادير بدست آمده برا ي يـک جريـان 100µA در انـدازه گيريهـاي مختلـف توسـط آن 109,108,110,108,110 بوده است(بدليل عدم تنظيم صفر).
- ملاحظه مي شود که خطاي اين اندازه گيري حدود ١٠ % وصـحت آن حدود ٩٠ % است در حالي که دقت آن حدود ٩٩ % مـي باشـد يعني تفاوت اندازه گيريها حدود ١ % است . در واقع با کاليبراسيون مي توان صحت دستگاه را بهتر کرد ولي دقت را خير.(در اينجا بـا کاليبراسيون خطا از حدود 10µA به حدود 1µA ميرسد.)

- خطاي مطلق اندازه گيري i ام:
که Xi قرائت i ام و y مقدار واقعي مي باشد

$$e_i = x_i - y$$

- خطاي نسبي اندازه گيري i ام:

$$\frac{x_i - y}{y}$$

- صحت اندازه گيري i ام:

$$1 - \left| \frac{x_i - y}{y} \right|$$

در مثال قبلي صحت اندازه گيري پنجم :

$$1 - \frac{110 - 100}{100} = 0.9$$

- ولي در دقت، كاري به مقدار واقعي نداريم و نزديک بودن مقادير به يکديگر مهم است:

$$1-\left|\frac{x_i-\overline{x}}{\overline{x}}\right|$$

- دقت اندازه گيري i ام:

که

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

در مثال قبل دقت اندازه گيري پنجم :

$$1-\frac{110-109}{109}=0.99$$

(خيلي اوقات بجاي اينکه بگوييم ۹۹% ميگوييم ۱%)

- از $\bar{x}$ به عنوان بهترين پاسخ براي اندازه گيري كميت استفاده مي كنيم.

بعضاً

$$\text{دقت اندازه گيري} = 1 - \underset{i}{Max}\left\{\left|\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}}\right|\right\}$$

دقت خود دو مشخصه را در بر مي گيرد:

۱ - سازگاري نتايج با يكديگر

۲ - تعداد ارقام معني دار

مثلا اگر مقدار واقعي مقاومتي 1378925Ω باشد ولـي بـا بيشـترين تــلاش وكوشــش در تخمــين محــل عقربــه اهــم متــر داده شده 1.38MΩ حاصل شده باشد يعني بيش از سه رقم معنـي دار نداشته باشد دقت هم نميتواند بيشتر از ايـن گـردد. بـه عبـارت ديگر تعداد زياد رقم معني دار شرط لازم دقت زياد است(ديديم كـه دقت شرط لازم صحت است البته معمولا دستگاه طوري طراحي مي شود كه صحتي در حدود ارقام معني دار داشته باشد.)

- رقم معني دار رقمي است كه بيانگر اطلاعاتي باشد مثلا وقتي ميگوييم ۱,۳۸ MΩ يعني مقدار قرائت شده به ۱,۳۸ نزديكتر است تا ۱,۳۷ يا ۱,۳۹و اگر آن را بصورت ۱۳۸۰۰۰۰ اهم بنويسيم تصور مي شود كه اين صفرها رقم معني دار هستندو واقعا از اندازه گيري بدست آمده اند (نزدیک بودن به اين عدد تا ۱۳۸۰۰۰۱ يا ۱۳۷۹۹۹۹) لذا بهتر است بصورت $1.38\times10^{6}\Omega$ نوشته شود.

اعمال رياضي بر روي اعداد معني دار:

- جمع (تفريق) : وقتي دو عدد معني دار را با هم جمع يا تفريـق مـي كنيم آنها را زير هم نوشته و پس از انجام عمل جمـع (تفريـق), فقـط ارقامي را نگه مي داريم كه در هر دو عدد معني دار بـوده انـد و بقيـه رقمها را با گرد كردن كنار مي گذاريم.
- مثال :
- $R1=8.7\Omega$, $R2=3.624\Omega \rightarrow R=R1+R2=12.324=12.3\Omega$
- $R1=8.7\Omega$, $R2=3.654\Omega \rightarrow R=R1+R2=12.4\Omega$
- $R1=18.7\Omega$, $R2=0.174\Omega \rightarrow R=R1+R2=18.9\Omega$

- ضرب (تقسيم): تعداد رقم معني دار حاصل برابر است با كوچكترين تعداد رقم معني دار.
- توجه شود كه عددي مثل 0.0004 داراي يك رقم معني دار است.
- مثال :
  - $V=35.68\ v\ ,\ I=3.18A \rightarrow P=V.I=113.4624=113W$

- رقم معني دار گرچه معياري ازدقت است ولي به اندازه گستره شـک (Range Of doubt) معين نيست.

- در بحث خطاهاي حـدي خـواهيم ديـد چطـور روي خطـاي حـدي عمليات انجام دهيم. به علاوه معمولا در قرائت عقربه سعي مي كنيم تا آخرين رقمي كه فكر ميكنيم مقدار به آن نزديكتر است تخمينـا قرائت ميكنيم. وقتي مينويسيم 5.16 يعني مطمئن هسـتيم 5.17 يا 5.15 نيست ولي ممكن است رنج شك ما واقعا بيش از اين باشد. به علاوه در عمليات روي اعداد مثل ضرب دو عدد فـوق الـذكر رنج شك حاصله واقعا 0.5v نيست و بسته به دو عدد ضرب شده ممكـن است در واقع بيشتر يا كمتر باشد ولي صرف بكار بـردن رقـم معنـي دار اين امر را نشان نمي دهد در عين حال به خـاطر سـادگي بكـار مي رود.

- قدرت تفکیک (**Resolution**) : کوچکترین تغییر در مقدار کمیت مورد اندازه گیري که ابزار اندازه گیري مي تواند آنرا آشکار کند.
- مثلا ولتمتر سه رقمي با درصد خطاي ±۱ درصد اگر ولتاژ ۵ ولتي را اندازه گیري مي کند چیزي بین ۴,۹۵ تا ۵,۰۵ نشان مي دهد ولي هرگز نمي تواند ۵,۰۰۱ ولت را بخواندچون این امر احتیاج به ۴ رقم رزولوشن دارد در حالیکه رزولوشن ولتمتر سه رقمه ۰,۰۱ ولت است.

- اما ولتمتر ۴ رقمه با همان ۱ درصد خطا را در نظر بگیریـد. ولتـاژ ۵ ولت را چيزي بين 4.950 تا5.050 خواهد خواند. درست است کـه صحت اين ولتمتر مانند ولتمتر قبل است ولي 0.001 ولت تغيير در ولتاژ ورودي خود را در خروجي نشان خواهـد داد.(البتـه در ولتمتـر سه رقمه هم ممکن است 0.001 ولت موجب تغيير در قرائـت 5.00 ولت شود ولي عدد بعدي ممکنه در آن 5.01 ولـت اسـت.) پـس در اولي رزولوشن 10mvو در اين يکي 1mv است.

- در دستگاههاي آنالوگ محـدوديت رزولوشـن بـه دليـل محـدوديت تعداد رقمها نيست بلكه اغلب تا شي از اندازه فيزيكي سنجه و فاصله بين نشانه هاي آن است . مثلا در دستگاه آنالوگي كه تمـام مقيـاس آن 10v است نمي توان تفاوت ولتاژ چنـد ميكـرو ولتـي را حـس نمود. و رزولوشن در order حدود ۱% تمام مقيـاس اسـت. معمـولا در دستگاهها سعي مي شود رزولوشن بهتر از صحت باشـد. بـه ايـن ترتيب مطمئنيم كه رزولوشن صحت قابل حصول را محـدود نكـرده است. به اين ترتيب تغييرات كم در قرائت را مي توان آشكار كرد(ولو كل آن قرائت داراي خطا مي باشد) بـه عبـارت ديگرصـحت نسـبي ممكن است خيلي بيش از صحت مطلق تمام مقياس باشد.

مطالب :

- √ ۱. مفهوم خطا، دقت و رقم معني دار.
- ←۲. انواع خطا
- ۳. بررسي آماري خطا
- ۴. خطاهاي حدي و تركيب آنها
- ۵. تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد

۲-انواع خطا:

- انواع خطا:
- ۱) خطاهاي فاحش
- ۲) خطاهاي سيستماتيک
- الف)خطاي وسيله اندازه گيري
- i)ضعف ذاتي دستگاه
- ii)بد بکار بردن دستگاه
- ب)خطاي محيطي
- ج)خطاي مشاهده
- ۳) خطاهاي تصادفي

١- خطاهاي فاحشGross errors:

- ١- خطاهاي فاحشGross errors: ناشي از اشتباه و بي دقتي انساني در استفاده از دستگاه اندازه گيري. در واقع اين خطا ازاشتباه در خواندن يا ثبت نتايج ناشي مي شود.مثلا استفاده از فركانسمتر بجاي ولتمتر. يا قرائت دستگاه را بجاي ٢١,٥ ، بخواند ٣١,٥ يا بنويسد ٢٥,١ .
- اين خطاها هر مقداري ميتواند داشته باشد و لذا مقدار آنهـا را نميتـوان به طور رياضي تخمين زد.
- مقابله : صرف دقت زياد در قرائت وثبت داده هـا , تكـرار انـدازه گيـري حداقل ٣ بار(بهتر است توسط افراد مختلف – خاموش و روشـن كـردن دستگاه)

۲- خطاهاي سيستماتيك Systematic :

- ۲- خطاهاي سيسـتماتيك Systematic Errors : قابـل جبران هستند و شامل خطاي وسيلة اندازه گيري , خطـاي محيطي و خطاي مشاهده مي شوند .

- الف) خطاي وسيلة اندازه گيري:
- i) ضعف ذاتي دستگاه : اصطكاک , كشش كم يا زياد فنر , غير خطي بودن المانها , درست كاليبره نبودن دستگاه و...
- راه حل : كاليبراسيون دقيق دستگاه و اعمال ضرايب تصحيح پس از اندازه گيري (و اندازه گيري توسط دستگاه هاي مختلف)
- ii) بد به كار بردن دستگاه : صفر نكردن دستگاه ، به كاربردن سيمهاي رابط با مقاومت زياد، استفاده از گستره (range) نامناسب ، در نظر نگرفتن اثربارگذاري

- این نوع خطا در بعضي از کتاب ها جزء خطا هاي فاحش طبقه بندي مي شود.
- راه حل : دقت در امور فوق الذکر ، اعمال ضرايب تصحيح وانجام اندازه گيري هاي متعدد توسط افراد مختلف.

- ب) خطاي محيطي: تغييـرات دراثـر حـرارت، رطوبـت، ميـدانهاي خارجي و . . .
- راه حـل : تثبيـت حـرارت و رطوبـت محـيط , shield كـردن دستگاه در مقابل عوامل خارجي (شيلد ميدان و ايزولاسـيون ا زنظـر حرارت و...)
- ج) خطاي مشاهده: (پارالاكس)
- اشتباه در خواندن مقدار يك دستگاه آنـالوگ . خيلـي اوقـات عقربـه بالاتر از صفحه مدرج قرار دارد و لذا خطاي پارالاكس اتفاق مي افتد.

- راه حل: براي رفـع خطـاي پـارالاكس آينـه در پشـت عقربـه قـرار ميدهند و بايد طوري نگاه كنيد كه تصوير عقربه زيـر عقربـه پنهـان شود. همچنين ميتوان عقربه و مقياس را در يک صفحه قـرار داد. در دستگاههاي ديجيتال اين خطا را نداريم .
- (در بعضي كتابها موارد ٢- الـفii و ٢-ج را خطـاي انسـان و مـوارد ٢- الفi و ٢- ب را خطاي سيستم مي گويند.)

- ۳- خطاهاي تصادفي(Random Errors): اگر استفاده كننـده خطاي فاحش مرتكب نشـود و كليـه دقتهـا و كاليبراسـيونها و عـدم تغييرات محيطي و... را بكار ببرد و يا تصحيح كند, باز هم خطاهـاي كوچكي ميماند كه در واقع ناشي از عوامـل متعـدد و ناشـناخته اي هستند كه هر كدام تأثير كمي روي حاصل اندازه گيـري دارنـد.ايـن خطاها را فقط بصورت آماري مي توان بررسي كرد.
- راه حل : انجام آزمايشهاي متعدد(سعي در استقلال انـدازه گيريهـا با تغيير مشاهده كننده, تغيير دسـتگاه انـدازه گيـري و تغييـر روش اندازه گيري) و ميانگين گرفتن.(مثبـت و منفـي يكـديگر را خنثـي كند)

مطالب :

- √ ۱. مفهوم خطا، دقت و رقم معني دار.
- √ ۲. انواع خطا
- ← ۳. بررسي آماري خطا
- ۴. خطاهاي حدي و تركيب آنها
- ۵. تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد

۳- بررسي آماري خطا:

- آمار استدلالي: بـا نمونـه بـرداري از يـك جامعـة آمـاري مـي تـوان جملاتي بيان كرد كه با احتمال زياد (حدود 95%) درسـت هسـتند. مثلا فاصله اعتماد
- آمار توصيفي: كمك ميكند كه به نحو بهتري نحـوه پراكنـدگي داده ها و قضاوت روي آنها را انجام بدهيم

ساده ترين كاربرد آمار در اندازه گيري در بيان مقدار متوسط و بيـان معياري براي ميزان دقت داده هاست.

- مثال: نتايج 20 اندازه گيري مختلف:

- 11.1, 11.3, 11.7, 11.3, 11.3, 11.4, 11.6, 11.2, 11.2, 11.5 , 11.5, 11.3, 11.5, 11.6, 11.1, 11.3, 11.4, 11.2, 10.8, 10.7

- فراواني مطلق: تعداد دفعاتي كه هر مقدار ظاهر مي شود.
- فراواني نسبي: نسبت فراواني مطلق به فراواني كل.
- اگر در n اندازه گيري m مقدار متمايز بدست آمده باشد:
- مقاديرمتمايز (sort شده) :

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

- فراواني: $n_1, n_2, \ldots, n_m$

-فراواني نسبي:

$$f_i = \frac{n_i}{n} \qquad f_1, f_2, \ldots, f_m$$

-فراواني نسبي انباشته:

$$F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j \qquad F_1, F_2, \ldots, F_m$$

-فراواني کل :

-روشن است که $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$ يا

$$\sum_{i=1}^{m} f_i = 1 \qquad F_m = 1$$

- تابع تکرار:Frequency function

$$f(x)=\begin{cases} f_i & x=x_i \\ 0 & else \end{cases}$$

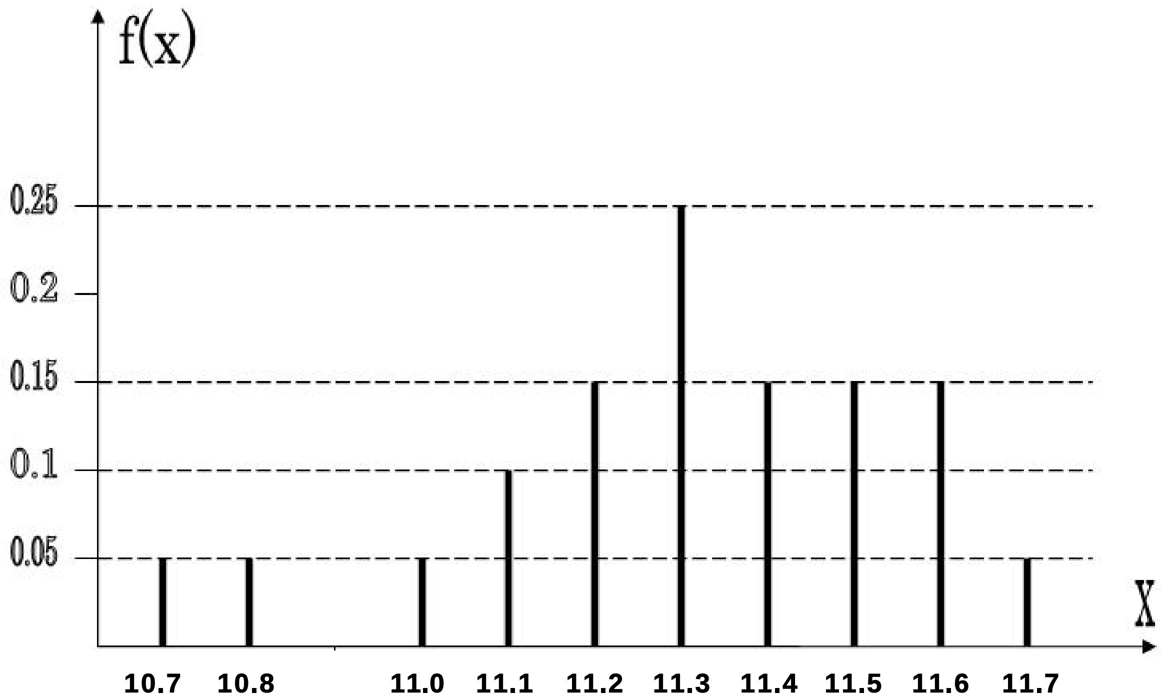
- تابع تکرار تجمعي يا تابع توزيع نمونه:

$$F(x) = \sum_{t \le x} f(t)$$

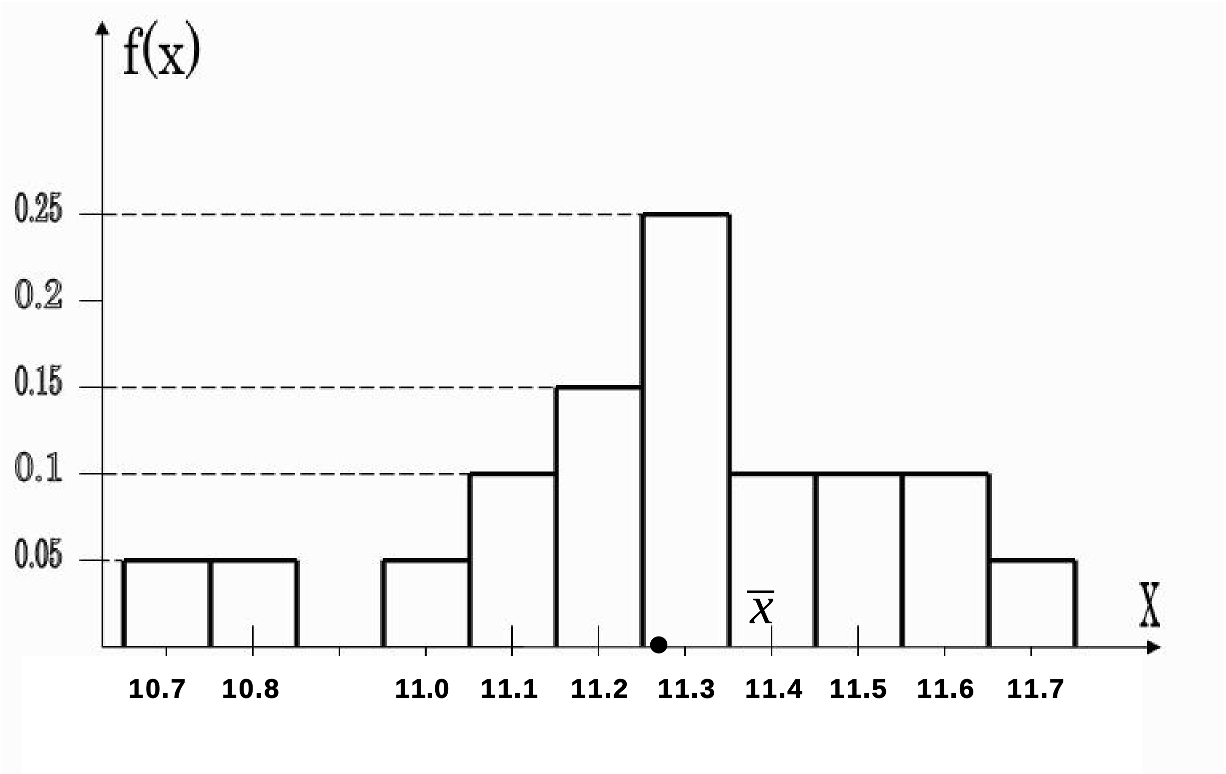
Commulative frequency function (sample distribution function)

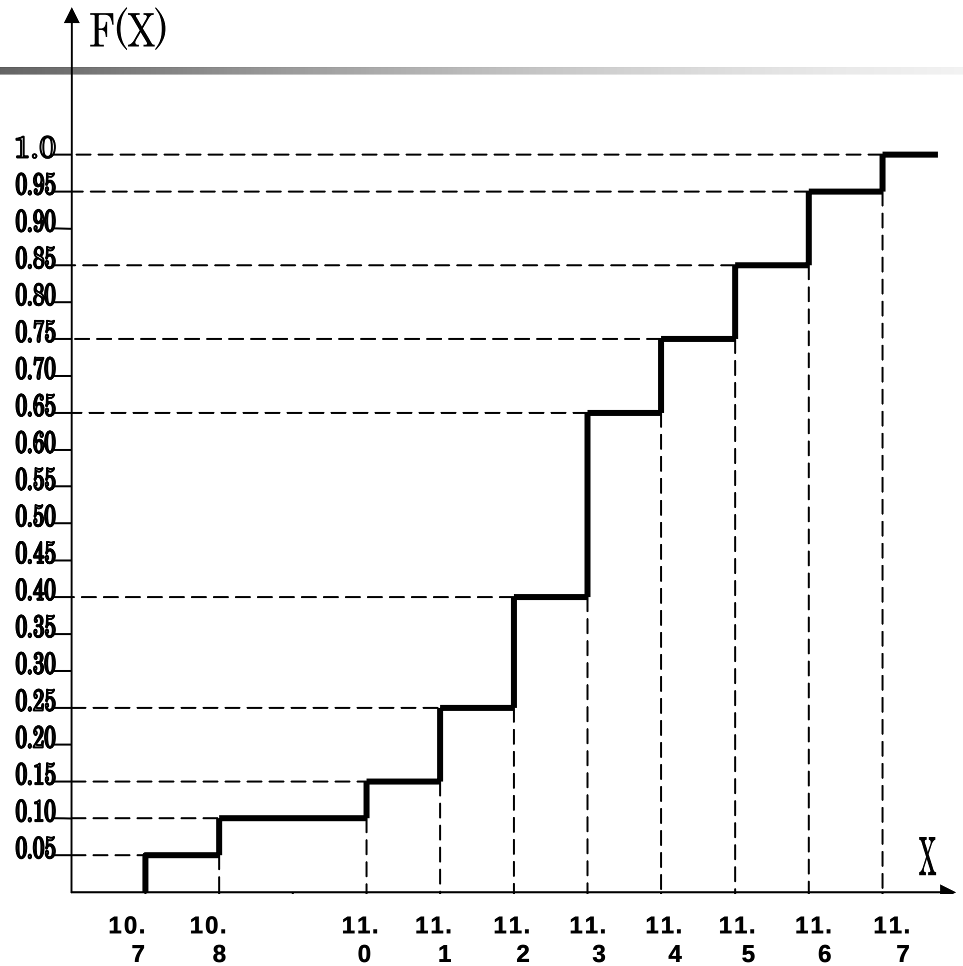
قرایت	فراوانی	فراوانی نسبی	فراوانی تجمعی	فراوانی نسبی تجمعی
10.7	1	0.05	1	0.05
10.8	1	0.05	2	0.1
11.0	1	0.05	3	0.15
11.1	2	0.1	5	0.25
11.2	3	0.15	8	0.4
11.3	5	0.25	13	0.65
11.4	2	0.1	15	0.75
11.5	2	0.1	17	0.85
11.6	2	0.1	19	0.95
11.7	1	0.05	20	1

نمودار میله اي:



هیستوگرام:


f(x)
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
$\overline{x}$
X
10.7
10.8
11.0
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5
11.6
11.7


F(X)
1.0
0.95
0.90
0.85
0.80
0.75
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
X
10.7
10.8
11.0
11.1
11.2
11.3
11.4
11.5
11.6
11.7

- میانگین نمونه: اگر n مشاهدهٔ $x_1 , x_2 ,\dots, x_n$ داشته باشیم:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- اگر n مشاهده داراي m مقدار متمايز باشند:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(n_i \times x_i) = \sum_{i=1}^{m}\left(f_i \times x_i\right)$$

- براي آزمايش قبلي:

$$n = 20, m = 10, \overline{x} = 11.275$$

- در صورتي که خطاهاي سيستماتيک جبران شده باشند و تفاوت X_i ها فقط ناشي از خطاي تصادفي باشد X را ميتوان معرف بهترين مقدارکميت مورد اندازه گيري دانست.
- (گاهي بجاي ميانگين حسابي ميانگين هندسي، يا ميانگين هارمونيک مناسبتر است.)
- ميانگين هندسي :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

- ميانگين هارموک :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{xi}\right)^{-1}$$

- انحرافات (**deviations**) : $d_i = x_i - \overline{x}$
- di ها بعضاً مثبت و بعضاً منفي هستند. روشن است كه:

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i = 0$$

(يعني $\overline{x}$ بهترين مقدار كميت مي باشد كه انحرافات مثبت و منفي باثقل يكسان حول آن اتفاق افتاده اند.)

- میزان پراکندگي X_i ها حـول $\overline{x}$ نشـانگر دقـت انـدازه گيـري X_i است(وقتي $\overline{x}$ ها را کنار گذاشته و از استـفاده مـي کنـيم, بـراي اينکـه اطلاعـي هـم در مـورد ميـزان پراکنـدگي داده باشـيم $\overline{x}\pm\delta$ را بکار ميبريم(که δ ميتواند انحـراف متوسـط,انحـراف اسـتاندارد يـا خطاي ماکزيمم باشد.)

- انحراف متوسط نمونه (sample average deviation) :
- يکي از معيارهاي ميزان پراکندگي x_i ها حول $\overline{x}$ ، انحراف متوسط است:

$$D=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|d_i\right|=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-\overline{x}\right|=\sum_{i=1}^{m}f_i\left|x_i-\overline{x}\right|$$

- توجه دارید که دیمانسیون D مانند x_iها است.
- در مثال فوق D=0.19 است.
- معیاردیگري که بیشتر کاربرد دارد انحراف استاندارد نام دارد:
- انحراف استاندارد نمونه (Sample Standard deviation) :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n}}$$

- در اينجا بر خطاهاي بزرگتر بيشتر تاكيد مي شود و لـذا S معمـولا بزرگتر از D است.
- S^2 واريانس نمونه نام دارد.
- براي nهاي كوچك (n<20) معمولاً از رابطـه زيـر اسـتفاده مـي شود :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^{m} f(x_i)(x_i - \overline{x})^2}$$

- در مثال قبل s=0.255
- دیمانسیون S مانند x_i ها است .
- خطاي ماکزیمم:

$$d_{\max} = \max|d_i|$$

- درمثال قبل

$$d_{\max} = 0.575$$

- معرف محافظه كارانه اي از گسترش مقادير اندازه گيري شـده حـول مقدار متوسط است.
- يكي از معيارهاي ميزان پراكندگي رنج يا گستره است:

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- در مثالي كه داشتيم $R=11.7-10.7=1.0$ گاهي هم از $R/2$ استفاده مي شود در اين مثال $R/2=0.5$
- توجه: اگر n مشاهدة $x_1 , x_2 ,\dots x_n$ داشته باشيم و تعريف كنيم $y=ax+b$:

$$\bar{y}=a+b\bar{x}$$

$$s_y^2=b^2 s_x^2$$

- اثبات:

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a+\sum_{i=1}^{n}bx_i\right)=\frac{1}{n}\left(na+b\sum x_i\right)=a+b\bar{x}$$

$$s_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(a+bx_i-a-b\bar{x}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}b^2\left(x_i-\bar{x}\right)^2=b^2s_x^2$$

- نکته: اگر $y = g(x)$ و $g(x)$ حول $\bar{x}$ تابع هموار باشد(با نوشتن بسط تیلور $g(x)$ و صرف نظر از ترم های درجه دوم و بالا تر یعنی تقریب خطي) داريم:

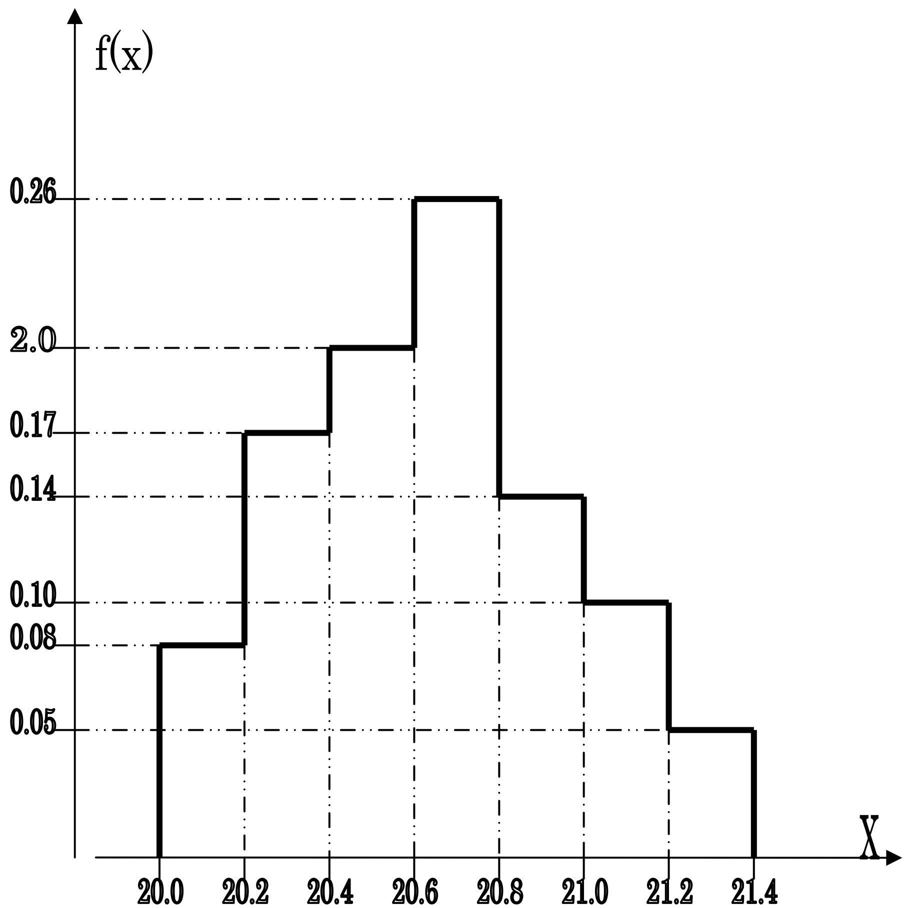
$$s_y^2 \approx g'^2(\overline{x}) s_x^2$$

$$\bar{y} \approx g(\bar{x}) + g''(\overline{x}) \frac{s_x^2}{2}$$

- داده هاي گروه بندي شده:
- در مواردي كه تعداد داده ها خيلي زياد باشد براي كاهش عمليات و سادگي نمايش داده ها آنها را گروه بندي مي كنند.

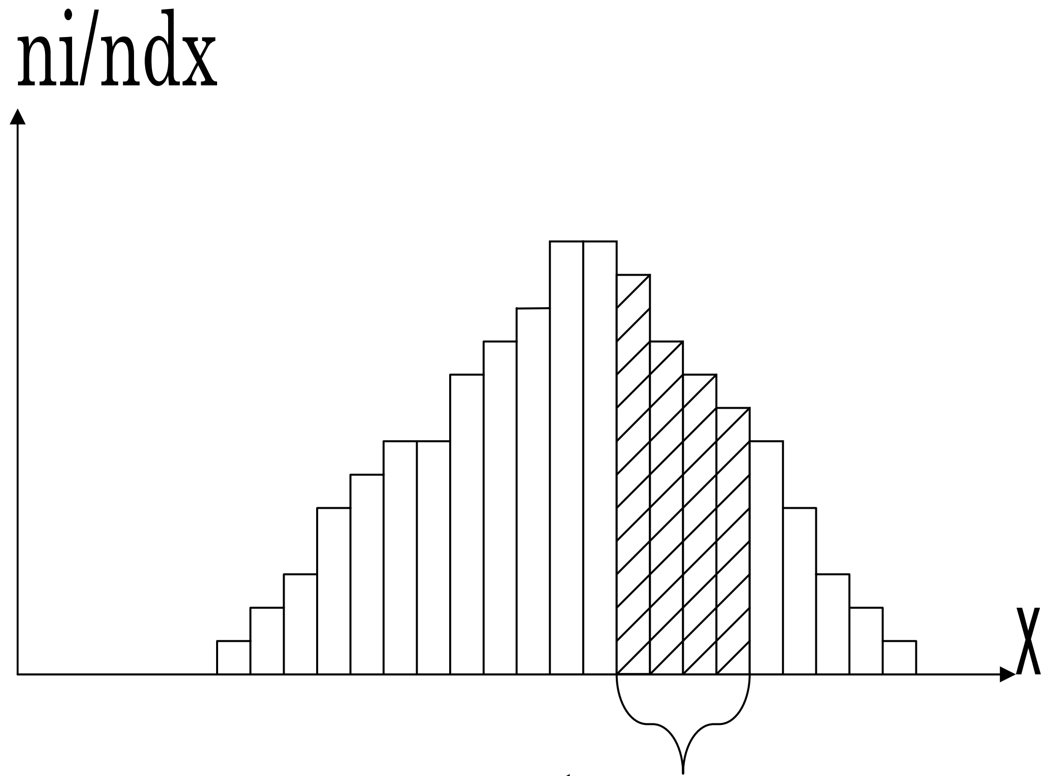
- مثال:

گروه	فراوانی	نشان گروه	فراوانی نسبی
[20-20.2]	8	20.1	0.08
[20.2-20.4]	17	20.3	0.17
[20.4-20.6]	20	20.5	0.4
[20.6-20.8]	26	20.7	0.26
[20.8-21]	14	20.9	0.14
[21-21.2]	10	21.1	0.1
[21.2-21.4]	5	21.3	0.05

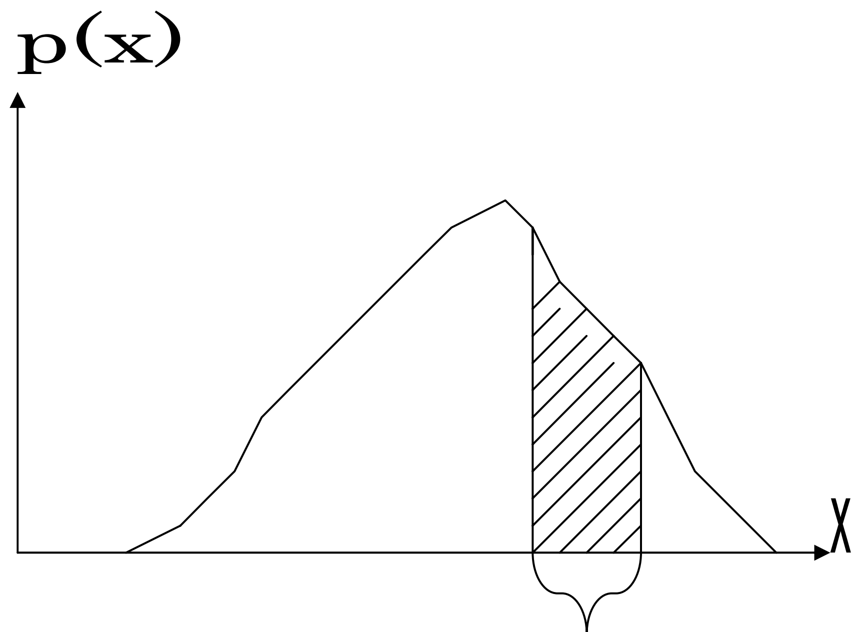

f(x)
0.26
2.0
0.17
0.14
0.10
0.08
0.05
X
20.0
20.2
20.4
20.6
20.8
21.0
21.2
21.4

- براي تعداد مشاهده كـم $f_i=\frac{n_i}{n}$ بـه n بسـتگي دارنـد ولـي بـراي n بزرگ f_i به عددي ميل مي كند كه عبارتسـت از احتمـال قـرار گـرفتن مقدار اندازه گيري شده در بازه i ام . به اين ترتيب با تقسيم كردن به n مانع افزايش ارتفاعها با افزايش n شده ايم.
- به عبارت ديگر: اگر n→∞ ، آنگاه هر f_i به سمت عددي ميل مي كند كه احتمال قرار گرفتن يك مشاهده در گروه iام است.

- نکته: اگر هيستوگرام را رسم کنيم، سطح زير نمـودار درهـر گـروه ، همان احتمال قرار گرفتن اندازه گيري در آن گروه است.
- اگر در مثال فوق Δx را نصف کنيم ، f_i ، ها هم تقريبا نصف مـي شوند. براي از بين بردن اين وابستگي بايـد $\frac{n_i}{n\Delta x}$ را رسـم کنـيم. براي n بزرگ $\frac{n_i}{n\Delta x}$ احتمال وقوع داده در بازه i ام بوده و $\frac{n_i}{n}$ چگالي اين احتمال است.



احتمال قرار رفتن مقدار اندازه گیری شده
برابر است با سطح مستطیل های این بازه



احتمال قرار گرفتن مقدار اندازه گیری شده
در این بازه برابر سطح زیر منحنی است

- تابع چگالي (توزيع) احتمال:

$$P(x) = \frac{n_x}{n\Delta x} \qquad n \to \infty, \Delta x \to 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

$$p\{x \in (x_1, x_2)\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

داشتیم $\bar{x} = \sum n_i f(n_i)$ حال با $n \longrightarrow \infty$ و $\infty \longrightarrow \Delta x$ داریم:

- میانگین:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

- انحراف متوسط:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| p(x) dx$$

- واریانس:

$$\mathrm{var} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx$$

- انحراف استاندارد:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}}$$

- توزیع گوسي نرمال :
- يكي از توزيعهاي متداول كه اغلب در اندازه گيـري اسـتفاده ميشـود توزيع نرمال است. اگر خطا ناشي از عوامل متعددي باشد طبق قضيه حد مركزي توزيع خطا نرمال خواهد بود:

$$N \sim (\mu,\sigma) \Leftrightarrow P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- مقدار (X) p در x=μ اتفاق افتاده و برابر $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ با مقدار p (X) در نقاط $\mu \pm \sqrt{2\sigma}$ به $\frac{١}{e}$ مقدار ماكزيمم خود مي رسد p (X) حول μ متقارن است يعني $p(\mu - x_0) = p(\mu + x_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \mu$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - \mu| p(x) dx = 0.798\sigma$$

$$\text{var} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2$$

- میانگین این توزیع μ وانحراف معیارآن σ است.
- نکته:

$$p\{x\in(\mu-\sigma,\mu+\sigma)\}=0.68$$

و به همین ترتیب :

احتمال وقوع	ناحيه حول μ
%۶۸	$\mp\sigma$
%۹۵	$\mp 2\sigma$
%۹۹,۷	$\mp 3\sigma$
%۵۰	$\mp 0.674\sigma$

- در گذشته گاهي بجاي انحراف معيار از خطاي محتمل استفاده مـي كردندكه در توزيع گوسي 0.674 است .
- خطاي متحمل (Probable error) : ناحيه اي حول مقدار ميـانگين كه نيمي از داده ها داخل آن قرار بگيرند.
- توزيع N(0,1) را نرمال استاندارد گويند:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$$

- اگر x دارای توزیع گوسي n(μ,σ) باشد آنگاه $z = \frac{x-m}{\sigma}$ نرمال استاندارد خواهد بود.
- انتگرال نرمال استاندارد در جداولي داده شده است.

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

- به این ترتیب با ایـن تغییـر متغیر مـي توانیـد احتمـال هـر واقعـه $x\in(x_1,x_2)$ را بدست آورید:

$$p\{x\in(x_1,x_2)\}=p\{z\in(\frac{x_1-\mu}{\sigma},\frac{x_2-\mu}{\sigma})\}=\phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma})-\phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma})$$

مطالب :

- √ ۱. مفهوم خطا، دقت و رقم معني دار.
- √ ۲. انواع خطا
- √ ۳. بررسي آماري خطا
- ←۴. خطاهاي حدي و تركيب آنها
- ۵. تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد

- خطاهاي حدي و تركيب آنها:
- خطاي حدي: اغلب سازندگان دستگاههاي اندازه گيري، ميزان خطاي اندازه گيري ، تضمين شدة دستگاه را بيان مي كنند و ضمانت مي كنند كه خطا بيشتر از آن نخواهد بود. مثلا سازنده مقاومت تلرانسي را بيان مي كند كه تضمين مي كند مقدار مقاومت در آن رنج خواهد بود. اين حد نهايي انحراف ضمانت شده را خطاي حدي گويند.

- در اغلب دستگاههاي اندازه گيري(آنـالوگ)، خطـاي حـدي بصـورت درصدي از قرائت تمام مقياس داده مي شـود. در ايـن صـورت بايـد توجه كرد كه درصد خطا براي مقادير كمتر از تمـام مقيـاس بيشـتر خواهد بود. مثلاً ١% تمام مقياسها، يعنـي اگـر تمـام مقيـاس ٣٠٠v باشد ٣v خطاي حدي خواهيم داشت. (چه ولتـاژ ١٠v باشـد و چـه ٣٠٠v) پس بهتر است، در زمان تعيين رنج ما سعي كنـيم اشـلي را انتخاب كنيم كه عقربه درثلث پايين اشل نباشد.

- مثال :
- يک ولتمتر ۰-۳۰۰ ولت داراي خطاي تضمين شده تمام مقياس مي باشد. ولتاژ اندازه - گيري شده توسط دستگاه ۱۵۰ ولت مي باشد. درصد خطاي حدي چقدر است؟
- خطاي حدي : $0.01\times300=3v$
- درصد خطاي حدي : $\frac{3}{150}\times100=2\%$

- ترکيب خطاهاي حدي:

$$y = u \mp v \quad , dy = du \mp dv$$

- که علامت را طوري انتخاب مي کنيم که بيشترين خطا را نتيجه بدهد. پس قدرمطلق خطاها را با همديگر جمع مي کنيم :

$$|\Delta y| = |\Delta u| + |\Delta v|$$

- اگر y=uv ویا y=u/v :

$$\left|\frac{dy}{y}\right|=\left|\frac{du}{u}\right|+\left|\frac{dv}{v}\right|$$

- يعني در در آنجا خطاهاي مطلق با هم جمع مي شدند اينجا خطاهاي نسبي با هم جمع مي شوند. در حالت كلي خواهيم داشت:

$$y = f(u,v) \Rightarrow dy = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

- و براي تعداد متغير بيشتر هم به همين ترتيب.

$$|\Delta y| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| |\Delta u| + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| |\Delta v|$$

- مثال:
- سه مقاومت با مقادير و خطاهاي حدي زير داريم:

$$R_1 = 37 \mp \%5 \quad R_2 = 75 \mp \%5 \quad R_3 = 50 \mp \%5$$

- اندازه مقاومت حاصل از تركيب سري آنها و خطاي حدي آنرا بدست آوريد:

$$R = (37+75+50) \mp (1.85+3.75+2.5) = 162 \mp 8.1$$

- مثال:

$$v_1 = 637 \pm 4v (0.63\%)$$
$$v_2 = 426 \pm 2v (0.47\%)$$
$$\Rightarrow v = v_1 - v_2 = 162 \pm 5\%$$

- توجه در تفاضل دو کميت درصد خطا زياد ميشود(درحـالي کـي در جمع اين چنين نبود.)لذا در روش اندازه گيري بايد مراقب بود .

- مثال:

$$V = 35.68 \pm 0.005 \quad I = 3.18 \pm 0.005$$

$$P = VI = 113.46$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \pm\left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}\right) = \pm\left(\frac{0.005}{35.68} + \frac{0.005}{3.18}\right) \rightarrow 0.014\% + 0.157\% = 0.171\%$$

$$\Delta p = \pm 0.1943W$$

- مي بينيم اينگونه بيان, بهتر ازاكتفا به ارقام معنـي دار اسـت(113w را قبلا بدست آورديم ولي خطا نيست.)

- مثال:
- مقدار مقاومت مجهول در پل وتستون:

$$R_X = R_2 R_3 / R_1$$

$$R_1 = 100 \mp 0.5\% \quad R_2 = 1000 \mp 0.5\% \quad R_3 = 842 \mp 0.5\%$$

$$R_X = 8420$$

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \mp\left(\frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} + \frac{\Delta R_1}{R_1}\right) = \mp 1.5\%$$

$$\Delta R_X = \pm \frac{1.5}{100} \times 8420 = \pm 126.2\Omega$$

- مثال۵
- مقدار مقاومت حاصل از اتصال موازي و خطاي حدي آن؟

$$R_1 = 100 \pm 0.1\Omega \qquad R_2 = 50 \pm 0.03\,\Omega$$

$$R = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R = \frac{100 \times 50}{100 + 50} = 33.33\,\Omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = \frac{R_2(R_1 + R_2) - R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} = \frac{50}{150} - \frac{100 \times 50}{150^2} = 0.111$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_2} = 0.444$$

$$|\Delta R| = \left|\frac{\partial R}{\partial R_1}\right||\Delta R_1| + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2}\right||\Delta R_2| \Rightarrow$$

$$\Delta R = \pm(0.111 \times 0.1 + 0.444 \times 0.03) = 0.0224\ \Omega$$

$$R = 33.33 \pm 0.0244\ \Omega\,(0.073\ \%)$$

- اگر هر دو α% خطاي حدي داشته باشندمقاومت موازي هم α% خطـاي حدي مي داشت.(مثل اتصال سري)

مطالب :

- √ ۱. مفهوم خطا، دقت و رقم معني دار.
- √ ۲. انواع خطا
- √ ۳. بررسي آماري خطا
- √ ۴. خطاهاي حدي و تركيب آنها
- ۵. تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد

تركيب خطاهاي از نوع انحراف استاندارد:

$$y = f(u,v) \Rightarrow \Delta y = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v$$

$$s_y^{2} = E(\Delta y^{2}) = \frac{1}{n}\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

$$\overline{\Delta y^{2}} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \overline{\left(\Delta u\right)^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \overline{\left(\Delta v\right)^2} + 2\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\overline{(\Delta u)(\Delta v)}$$

$$u \coprod v \xrightarrow{\overline{\Delta u \Delta v} \rightarrow 0} s_y^{2} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 s_u^{2} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 s_v^{2}$$

$$Y = U \mp V \quad \rightarrow \quad S_Y^2 = S_U^2 + S_V^2$$

$$Y = UV \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{S_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{S_V}{V}\right)^2$$

$$Y = \frac{U}{V} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{S_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{S_U}{U}\right)^2 + \left(\frac{S_V}{V}\right)^2$$

- و به همين ترتيب براي بيش از دو بعد قابل تعميم است.

- مثال:
- سه مقاومت با مقادير و خطاهاي استاندارد زير داريم:

$$R_1 = 37 \pm 1.85 \quad R_2 = 75 \pm 3.75 \quad R_3 = 50 \pm 2.5$$

- اندازه مقاومت حاصل از تركيب سري آنها و خطـاي اسـتاندارد آنـرا بدست آوريد:

$$S_R = \sqrt{S_{R1}^2 + S_{R2}^2 + S_{R3}^2} = 4.87$$
$$\Rightarrow R = 162\ \Omega + 4.78\ \Omega = 162\ \Omega + 3\%$$

- در حالیکه خطاي R1,R2,R3 ۵% بود.و همچنین در حالـت خطـاي حدي داشتیم:

$$R = 162\,\Omega \pm 8.1\,\Omega$$

- توجه کنید در عمل تلرانسي که براي مقامتها داده مي شـود از نـوع خطاي حدي است نه انحراف استاندارد.

- مثال:
- دو مقاومت با مقادیر و خطاهاي انحراف استاندارد زیر داریم:

$$R_1 = 100 \pm 1\% = 100 \pm 1\ \Omega \qquad R_2 = 50 \pm 1\% = 50 \pm 0.5\ \Omega$$

- اندازه مقاومت حاصل از ترکیب سري آنها و خطـاي اسـتاندارد آنـرا بدست آورید:

$$R = 33.33\,\Omega \qquad S_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2 S_R^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2 S_R^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_1} = 0.111 \qquad \frac{\partial R}{\partial R_2} = 0.444$$

$$\Rightarrow S_R = 0.248\,\Omega \rightarrow 0.745\%$$

- در حالیکه اگر خطاي حدي را حساب مـي كـرديم$\Delta R=0.333\ \Omega$ يعني همان ۱% .
- تذكر: مي دانيم كه اگر خطاي حدي در مقاومـت $\alpha\%$ باشـد خطـاي حدي حاصل از سري كردن آنها نيز همان $\alpha\%$ خواهد بود ولـي اگـر خطاي استاندارد در مقاومت $\alpha\%$ باشـد خطـاي اسـتاندارد حاصـل از سري كردن آنها كمتر از $\alpha\%$ خواهد بـود يعنـي واريـانس متمركزتـر خواهد شد.

- مثال۳ : مقدار یک مقاومت خطا از نــوع انحــراف اســتاندارد اســت. اختلاف پتانسیلي به این مقاومت اعمال کرده و تــوان را از دو طریــق محاسبه مي کنیم:

- الف) $P = \frac{V^2}{R}$

- ب) $P = VI$

- انحراف استاندارد توان را در دو حالت محاسبه کنید اگر:

$$I = 10\ A \pm 1\% \qquad V = 100\ v \pm 1\%$$

- (خطا از نوع انحراف استاندارد است.)

$$P = \frac{V^2}{R} = 1000\,W$$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{V^2}{R^2} \qquad\qquad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{2V}{R}$$

$$S_P = \sqrt{\left(\frac{2V}{R}\right)^2 S_V{}^2 + \left(\frac{V^2}{R^2}\right)^2 S_R{}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_P}{P} = \sqrt{4\left(\frac{S_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{S_R}{R}\right)^2} = \sqrt{4(0.01)^2 + (0.01)^2} = 2.236\%$$

$$P = VI = 1000\,W$$

$$S_P = \sqrt{I^2 S_V{}^2 + V^2 S_I{}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{S_P}{P} = \sqrt{\left(\frac{S_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{S_I}{I}\right)^2} = \sqrt{2(0.01)^2} = 1.414\%$$

$$S_P = 14.14\,W$$

- يعني روش دوم بهتر است . پس انتخاب عاقلانه روش انـدازه گيـري براي كاهش عدم تضعيف نتايج نهايي مهم است.