مقایسه

تعاریف سایر کتب‌های درسی ما از مرتبه همگرایی

چانگ:

- p مرتبه همگرایی است اگر:

$$0 < \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} < \infty$$

$\frac{0}{0} = 0$ قرارداد می‌شود.

- همگرایی خطی $\equiv (p=1)$
- همگرایی درجه ۲ $\equiv (p=2)$
- همگرایی superlinear $\equiv (p>1)$

لوئنبرگر:

- مرتبه همگرایی: سوپریمم p هایی که برای آن:

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} < \infty$$

- همگرایی خطی: $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = a < 1$
- همگرایی superlinear: $e_{k+1} = o(e_k)$ یا $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0$

Fletcher:

- مرتبه همگرایی: مثل چانگ
- همگرایی خطی: هم گفته معادل $p=1$ است و هم گفته $\lim \frac{e_{k+1}}{e_k} \leq a$ شرط $a<1$ باشد را ندارد ولی گفته وقتی مفید است که a کوچک باشد
- همگرایی superlinear: $\frac{e_{k+1}}{e_k} \to 0$ یا $e_{k+1} = o(e_k)$
- همگرایی درجه ۲: هم گفته معادل $p=2$ هم $e_{k+1} = O(e_k^2)$

نوسدال :

— می‌گوئیم دنباله بصورت Q-linear (quotient) اگر $\overbrace{r\in(0,1)}^{0<r<1}$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\frac{e_{k+1}}{e_k}\leq r \longrightarrow$$ برای k به اندازه کافی بزرگ

— می‌گوئیم دنباله بصورت Q-superlinear همگراست اگر:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=0$$

— می‌گوئیم دنباله بصورت Q-quadratic همگراست اگر M ای باشد:

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2}<M \longrightarrow$$ برای k های به اندازه کافی بزرگ

— می‌گوئیم دنباله بصورت Q-order of conv. برابر p همگراست اگر M ای باشد که:

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p}<M \longrightarrow$$ برای k به اندازه کافی بزرگ

مثالها از تفاوتهای تعاریف بالا :

① $x_k=\frac{1}{k} \leftarrow \lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=1$

←
- با تعریف چانگ و فلچر ← مرتبه همگرایی = 1
- با تعریف لوئنبرگر ← 〃 = 1
- با تعریف چانگ همگرای خطی هست.
- 〃 〃 لوئنبرگر 〃 〃 نیست.
- 〃 〃 فلچر 〃 〃 هست.

۲

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \begin{cases} 0 & p=1 \\ \infty & p>1 \end{cases} \leftarrow x_k = \left(\frac{1}{k}\right)^k$$

- با تعریف لوئیزگر و منچر همگرایی superlinear دارد.
- " " لوئیزگر مرتبه همگرایی = 1 ← از نظر لوئیزگر این مثالی از حالتی است که همگرایی superlin داریم ولی مرتبه همگرایی بزرگتر از 1 نیست.
- با تعریف چانگ و منچر مرتبه همگرایی قابل تعریف نیست.