اثبات: چون x^* جواب لوکال است پس برای هر دنباله فیزیبل $z_k \to x^*$ داریم $f(z_k) \geq f(x^*)$ (از kای به بعد). اثبات قضیه بر این مبناست که برای یک d دلخواه عضو F_2، یک دنباله z_k می‌سازیم که از سمت d به x^* نزدیک شود و برای این دنباله رابطه (*) برقرار است.

بدون از دست رفتن کلیت فرض کنید $\|d\|=1$

یک $d \in F_2$ دلخواه را در نظر بگیرید. پس $d \in F_1$ است و چون LICQ برقرار است $F_1 = \mathcal{F}$ یعنی حتماً می‌توان از سمت d به x^* نزدیک شد. در واقع در اثبات قضیه $d \in F_1 \xrightarrow{LICQ} d \in \mathcal{F}$، چنین دنباله‌ای را که ما بیان نکرده بودیم واقعاً ساخته می‌شود. دنباله‌ای که در اثبات آن قضیه ساخته می‌شود، خواص زیر را دارد:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k - x^*}{\|z_k - x^*\|} = d \quad ①$$

$$c_i(z_k) = t_k\, d^T \cdot a_i^* \quad ②$$

$$\begin{cases} t_k \geq 0 \\ t_k \xrightarrow{k\to\infty} 0^+ \end{cases}$$

$$③ \quad \|z_k - x^*\| = t_k + o(t_k)$$

یا

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t_k}{\|z_k - x^*\|} = 1$$

با قرار دادن ③ در ①:

$$z_k - x^* = t_k\, d + o(t_k)$$

ویژگی این دنباله که باعث اثبات قضیه می‌شود این است که برای این دنباله $f(z_k) = \mathcal{L}(z_k, \lambda^*)$، چون:

$$\mathcal{L}(z_k, \lambda^*) \triangleq f(z_k) - \sum_{i\in\mathcal{E}\cup\mathcal{I}} \underbrace{\lambda_i^* c_i(z_k)}_{= \lambda_i t_k \underbrace{d^T \cdot a_i}_{}} = f(z_k)$$

0 ← طبق تعریف F_2 ← نکته بعد از اثبات قضیه اثبات شود.

بنابراین از بسط تیلور $\mathcal{L}(\underset{\text{پارامتر متغیر}}{\underline{x}}, \underline{\lambda}^*)$ حول $\underline{x}^*$ داریم:

$$\underline{d}\in F_2 \Rightarrow \overbrace{f(\underline{z}_k)}^{\mathcal{L}(\underline{z}_k,\underline{\lambda}^*)} = \overbrace{f(\underline{x}^*)}^{\mathcal{L}(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)} + \frac{1}{2}\|\underline{z}_k-\underline{x}^*\|^2\, \underline{d}^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)\,\underline{d} + o(\|\underline{z}_k-\underline{x}^*\|^2)$$

یا

$$f(\underline{z}_k) = f(\underline{x}^*) + \frac{1}{2} t_k^2\, \underline{d}^T \nabla_{xx}\mathcal{L}(\underline{x}^*,\underline{\lambda}^*)\,\underline{d} + o(t_k^2)$$

برای هر k بزرگتر از حدی $\rightarrow f(\underline{z}_k)\geq f(\underline{x}^*) \Rightarrow$ برای هر k بزرگتر از حدی $\longrightarrow \frac{1}{2} t_k^2\, \underline{d}^T(\nabla_{xx}\mathcal{L})\,\underline{d} + o(t_k^2)\geq 0$

با میل دادن $k\to\infty$، از جایی به بعد جمله اول غالب می‌شود $\Rightarrow \underline{d}^T\nabla_{xx}\mathcal{L}\,\underline{d}\geq 0 .$ $\blacksquare$