هو العلیم الحکیم

دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه صنعتی شریف

بلورهای فوتونی

آزمون پایان ترم - تاریخ: ۱۳۸۹/۱۰/۲۸

- فقط به سه مسئله پاسخ دهید.
- مدت امتحان: ۱۸۰ دقیقه (غیر قابل تمدید)
- استفاده از مراجع آزاد است
- به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱. در یک بلور فوتونی دوبعدی مثلثی، شش دوقطبی همانند در شش‌گوشه‌ی یک سلول واحد آن به طور هم‌فاز تابش می‌کنند. ابتدا تابعی دقیق برای الگوی تشعشعی این ساختار محاسبه نمایید. حال اگر بسامد دوقطبی‌ها به گونه‌ای اختیار شود که در میانه‌ی نوار اول مجاز قرار گیرد با توجه به تقارن‌های ممکن شکل کیفی موج تابیده را بدست آورید و با کمک ترسیم پربندهای میدان ثابت نمایش دهید. اکنون فرض کنید که سه دوقطبیِ دوبدو مقابل، از شش دوقطبی مورد نظر، دارای اختلاف فاز ۱۸۰ درجه با سایرین باشند. نتیجه چگونه تغییر می‌کند؟

۲. یک بلور فوتونی در فضای دوبعدی $\mathbf{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$ دارای تابع گذردهی الکتریکی به فرم زیر است:

$$\varepsilon(\mathbf{r})=f_1(ax+by)+f_2(cx+dy)$$

که در آن $f_i(l)=f_i(l+2\pi), i=1,2$ و $a,b,c,d\in\Re^+$ با شرط $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq 0$. بردارهای پایه‌ی بلور و نوع آن را مشخص کنید؛ شروط کافی برای آن‌که بلور مربعی یا مثلثی باشد کدامند؟ اکنون دستگاه معادلاتی را بنا کنید که بتوان از آن به ساختار باند فوتونی دقیق برای قطبش الکتریکی دست یافت. حال اگر نمایش فوریه‌ی توابع $f_i(l), i=1,2$ به صورت $f_i(l)=f_i\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{jnl}$ باشد، پاسخ را ساده نمایید (راهنمایی: آیا می‌توانید فرم ساده‌تری برای توابع $f_i(l)$ بیابید؟).

۳. می‌دانیم که بر اساس آنالیز مودهای مزدوج، رابطه‌ی تقریبی پاشندگی یک CROW به صورت $\omega(\kappa)=\omega_0+\alpha\cos(\kappa L)$ است. بسته‌ی موجی گوسی به فرم $a(x,t)=\exp(j\Omega t)\exp\left(\frac{x-v_g t}{\delta}\right)^2$ را به درون این ساختار می‌فرستیم. شروطی را برای انتشار این موج گوسی در CROW بیابید. اگر پهنای طیفی موج گوسی $\Delta\Omega$ از $|\alpha|$ خیلی کوچک‌تر باشد، پس از طی مسافت NL در درون CROW شکل موج به چه صورت در می‌آید؟

۴. فرض کنید یک بلور فوتونی دو بعدی غیرمغناطیسی دارای تابع گذردهی الکتریکی $\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon(\mathbf{r}+p\mathbf{a}+q\mathbf{b})$ باشد. ویژه‌مودهای قطبش الکتریکی را با مجموعه توابع $E_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{r})$ نشان می‌دهیم که در آن n شماره‌ی باند و $\boldsymbol{\kappa}$ بردارموج بلوخ-فلوکه است. نشان دهید این توابع شرط تمامیت زیر را راضی می‌کنند:

$$\int_{BZ}\sqrt{\varepsilon(\mathbf{r}_1)\varepsilon(\mathbf{r}_2)}E_{n_1\boldsymbol{\kappa}}^{\ *}(\mathbf{r}_1)E_{n_2\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{r}_2)\,d^2\kappa=\delta_{n_1n_2}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$$

حال توابع شبه‌وَنیِر زیر را تعریف می‌کنیم:

$$V_{n\mathbf{G}}(\boldsymbol{\kappa})=\frac{1}{V_{UC}}\int_{UC}\exp(-j\mathbf{r}\cdot\mathbf{G})E_{n\boldsymbol{\kappa}}(\mathbf{r})\,d^2r$$

که در آن $\mathbf{G}=p\mathbf{a}^*+q\mathbf{b}^*$ و V_{UC} حجم یاخته‌ی واحد است. نشان دهید این توابع خواصی شبیه به توابع ونیر را دارا می‌باشند. تبدیلی را نشان دهید که بتوان از مجموعه‌توابع ونیر $W_{n\mathbf{R}}(\mathbf{r})$، توابع $V_{n\mathbf{G}}(\boldsymbol{\kappa})$ را یافت.

موفق باشید