

فصل ۱: تاریخچه و مفهوم احتمال

Section 1.1

تاریخچه و مفهوم احتمال:

در واقع شانس و عدم قطعیت تاریخچه‌ای به درازای تمدن بشریت دارد. گفته می‌شود که شواهدی از قماربازی در ۳۵۰۰ سال قبل از میلاد به‌دست آمده (در مصر و ...) و تاسی شبیه تاس کنونی در مصر (۲۰۰۰ سال قبل از میلاد) به دست آمده است. متأسفانه قماربازی و تاس نقش مهمی در توسعه تئوری احتمال داشته است.

تئوری احتمال به طور ریاضی توسط پاسکال (و فرما) در قرن ۱۷ آغاز شد که سعی در حل و به‌دست آوردن احتمال دقیق در برخی مسائل قماربازی به طور ریاضی داشتند. البته قبل از آنها نیز کاردان و گالیله (قرن ۱۶) به حل چنین مسائلی (به طور عددی) پرداخته‌اند.

از قرن هفدهم مرتباً تئوری احتمال توسعه یافت و در رشته‌های مختلف به‌کار گرفته شد. امروزه احتمال در اغلب زمینه‌های مهندسی و علوم مدیریت ابزار مهمی است و حتی استفاده از آن در پزشکی، رفتارشناسی، حقوق و ... مطرح است!

پاسکال: فوق‌العاده است که این علم در آغاز برای بررسی بازیهای شانس ابداع شده بود، ولی امروزه باید به عنوان مهمترین دانش بشری درآید.

با وجود کاربرد وسیع احتمال و علی‌رغم اینکه چنین مفاهیمی را دائماً در زندگی روزمره استفاده می‌کنیم، تعریف علمی یگانه‌ای برای احتمال وجود ندارد و در طول تاریخ رشد تئوری احتمال تعاریف مختلفی از احتمال شده است که هر یک بعداً مورد انتقاد دیگران قرار گرفته است.

۱. تعریف کلاسیک احتمال (توسط پاسکال در قرن ۱۷)

اگر در یک آزمایش تصادفی (بعد دقیق تعریف می‌کنیم)، تعداد کل نتایج ممکنه N باشد، احتمال واقعه A عبارت است از:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\text{تعداد نتایج مطلوب}}{\text{تعداد کل نتایج ممکنه}}$$

۲. تعریف فراوانی (فرکانس) نسبی (تعریف آماری)

این تعریف اولین بار در قرن جاری (۱۹۵۷) توسط Von Mises برای اصلاح تعریف کلاسیک معرفی شد.

اگر آزمایش تصادفی را n بار انجام دهیم، برای n بزرگ داریم: $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$ ، یا به تعبیر بهتر: $P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n_A}{n}$.

۳. تعریف ذهنی (Subjective)

نگرش به احتمال به عنوان معیاری از میزان اعتقاد به یک امر است.

مثلاً وقتی می‌گوییم فلان متهم به احتمال ۷۰٪ مجرم است، در اینجا احتمال بیانگر میزان اعتقاد ما به حقیقت یک امر می‌باشد. البته این بسیار به قضاوت کننده بستگی دارد (Subjective است) و ممکن است با همان دلایل و مدارک شخص دیگری بگوید به احتمال ۹۰٪ مجرم است.

تعاریف گذشته اشکالاتی دارند که از آنها به عنوان مبنای یک تئوری ریاضی نمی‌توان استفاده کرد.

۴. تعریف اصولی (Axiomatic Definition)

این تعریف توسط کولموگروف در سال ۱۹۳۳ ارائه شد (البته سالها طول کشید تا مورد توجه قرار گیرد). در اینجا احتمال بر مبنای تئوری اندازه ارائه می‌شود و به هر واقعه عددی (که احتمال آن واقعه نامیده می‌شود و باید در اصول موضوعه سه‌گانه صدق کند) نسبت داده می‌شود. اینکه چه عددی به هر واقعه نسبت داده شود (با فرض ارضاء شرایط اصول موضوعه) دلخواه است و ممکن است تطابق کامل با واقعیت نداشته باشد. اما با فرض صحت این احتمالات مفروض برای واقعه‌ها، با استفاده از تئوری احتمال می‌توانیم احتمال وقایع دیگر مورد نظرمان را به دست آوریم.

یعنی سه مرحله (در مدلسازی احتمالاتی) وجود دارد:

۱. با پروسه‌ای مواجهیم که به دلیل پیچیدگی، وقوع وقایع را به صورت احتمالی می‌خواهیم مدل کنیم (مثل شیر یا خط آمدن سکه و یا پیش‌بینی وضع هوا، در واقع پروسه‌های دترمینیستیک (Deterministic) و تابع قوانین فیزیکی) یا اینکه ذاتاً احتمالاتی است (مثل مکانیک کوانتومی). لذا برای واقعه‌های A_i ، احتمالات $P(A_i)$ را در نظر می‌گیریم.

۲. با فرض اینکه $P(A_i)$ ها اصول موضوعه معینی را ارضاء کنند، با استفاده از منطق و استدلال احتمال وقایع B_i را $P(B_i)$ محاسبه می‌کنیم.

۳. پیش‌بینی می‌کنیم که در عمل وقایع B_i به احتمال $P(B_i)$ اتفاق بیفتند.

مراحل ۱ و ۳ با جهان خارج سر و کار دارند، در حالی که مرحله دوم کاملاً مفهومی است و ما در آن با مدل احتمالاتی که از جهان خارج ساخته‌ایم سر و کار داریم. در مرحله دوم هیچ شک و شبهه و گمانی نیست. همه چیز بر مبنای استدلالات کامل و دقیق منطقی است. یعنی به این ترتیب احتمال نیز علمی کاملاً دقیق و استدلالی خواهد بود.

در این درس ما از تعریف اصولی احتمال استفاده می‌کنیم. البته در مراحل ۱ و ۳ که نسبت دادن احتمالات به جهان خارج است، استفاده از سایر تعاریف احتمال مفید واقع می‌شود. ممکن است گفته شود چه فایده که نتایج لزوماً با نتایج واقعی تطابق نخواهد داشت. ولی در هر علم دیگری نیز همین‌طور است.

ما مدل‌هایی را که اغلب خیلی ساده‌تر از جهان خارج هستند را فرض کرده و آنالیز می‌کنیم و نتیجه آنالیز را با تقریب برای آنچه در جهان خارج اتفاق می‌افتد پیش‌بینی می‌کنیم. مثلاً در تئوری مدار داریم: $R = \frac{V}{I}$. مقاومت واقعی با آنچه ما در آنالیز ایده‌آل خود مدل کرده‌ایم متفاوت است و لذا پاسخ مداری که در جهان خارج داریم کاملاً با پاسخی که تئوری مدار می‌دهد مطابقت نمی‌کند. ولی به عنوان تقریبی از آن قابل استفاده است.

نکته دیگر اینکه ممکن است تصور شود استفاده از احتمالات همواره ناشی از جهل ما نسبت به پدیده‌ها و قوانین حاکم بر آنها است و لذا آنالیز احتمالاتی را پیش می‌گیریم. ولی در واقع باید دانست که در بسیاری از موارد وقتی از آنالیز دترمینیستیک استفاده می‌کنیم، مسأله را آن‌قدر ساده کرده‌ایم که به مراتب میزان جهل و کنار گذاشتن اطلاعات در آن بیشتر است.

مثلاً مقدار مقاومت 2Ω دقیقاً 2Ω نیست، بلکه توزیعی حول و حوش 2Ω دارد. وقتی دو مقاومت 2Ω را سری می‌کنیم اگر فقط متوسطها را به کار ببریم، می‌گوییم مقاومت حاصله 4Ω است. در حالی که آن هم یک رنج مقادیر و توزیع خاصی دارد.

یا گلوله توپ وقتی پرتاب می‌شود، در آنالیز ساده دترمینیستیک یک نقطه برای محل برخورد آن با زمین پیش‌بینی می‌شود، در حالی که در آنالیز احتمالاتی یک محدوده با تعیین میزان چگالی احتمال نقاط مختلف به دست می‌آید.