می‌توانیم مستقیماً f_y را از روی f_x به دست آوریم.

قضیه: برای y داده شده، اگر معادلهٔ $g(x)=y$ دارای ریشه‌های x_1، x_2 و ... باشد، یعنی: $y=g(x_1)=g(x_2)=\cdots$، داریم:

$$f_y(y)=\sum_i \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|}$$

که:

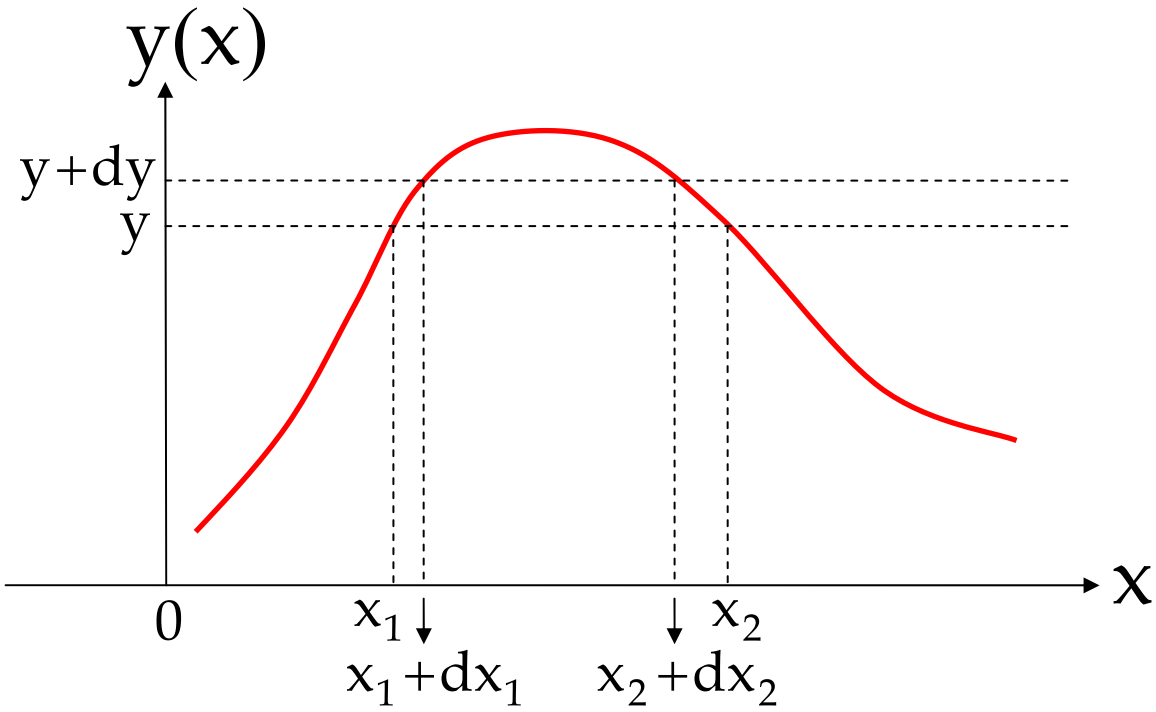
$$f_x(x_i)=f_x(x)\big|_{x=x_i(y)}$$

$$g'(x_i)=\frac{d}{dx}g(x)\bigg|_{x=x_i(y)}$$

(مشروط بر اینکه برای y داده شده، تعداد نقاط x_i قابل شمارش باشد و $F(x)$ در نقاط x_i مشتق‌پذیر باشد.)

ما در اینجا قضیه را برای وقتی که دو ریشه موجود باشد، اثبات می‌کنیم که به حالت کلی نیز قابل تعمیم است.

(در مثال خواهیم دید که در محلهایی که $g'=0$ می‌شود، f_y به سمت بی‌نهایت می‌رود، ولی جای نگرانی نیست.)



$\rightarrow dx_1>0 \; , \; dx_2<0$

$f_{\mathbf{y}}(y)dy=P\{y<\mathbf{y}<y+dy\}=P\{x_1<\mathbf{x}<x_1+dx_1\}+P\{x_2+dx_2<\mathbf{x}<x_2\}=f_{\mathbf{x}}(x_1)dx_1+f_{\mathbf{x}}(x_2)\left|dx_2\right|$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y)dy=f_{\mathbf{x}}(x_1)\frac{dy}{g'(x_1)}+f_{\mathbf{x}}(x_2)\frac{dy}{\left|g'(x_2)\right|}$$

زیرا: $y=g(x)\Big|_{x=x_1,x_2} \Rightarrow dy=g'(x)dx\Big|_{x=x_1,x_2}$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{f_{\mathbf{x}}(x_1)}{g'(x_1)}+\frac{f_{\mathbf{x}}(x_2)}{\left|g'(x_2)\right|}$$

و در حالت کلی:

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \sum_i \frac{f_{\mathbf{x}}(x_i(y))}{|g'(x_i(y))|}$$

روش دیگر:

$$f_{\mathbf{y}}(y)dy = f_{\mathbf{x}}(x_1(y))dx_1(y) + f_{\mathbf{x}}(x_2(y))|dx_2(y)|$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y) = f_{\mathbf{x}}(x_1(y))\frac{dx_1(y)}{dy} + f_{\mathbf{x}}(x_2(y))\left|\frac{dx_2(y)}{dy}\right|$$

و در حالت کلی:

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \sum_i f_{\mathbf{x}}(x_i(y))\left|\frac{dx_i(y)}{dy}\right|$$

ضمناً اگر برای y داده شده، $g(x) = y$ ریشه‌ای نداشته باشد، داریم: $f_{\mathbf{y}}(y) = 0$.

مثال: $a > 0$, $\mathbf{y} = a\mathbf{x}^2$؛ یعنی $g(x) = ax^2$ (آشکارساز مربعی یا توان مقاومت $P = \frac{V^2}{R}$).

برای $y > 0$ داده شده، معادلهٔ $y = ax^2$ دو ریشه دارد:

$$x_1 = \sqrt{\frac{y}{a}} \ , \ x_2 = -\sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = 2ax \Rightarrow \begin{cases} g'(x_1(y)) = 2a\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\sqrt{ay} \\ g'(x_2(y)) = -2a\sqrt{\frac{y}{a}} = -2\sqrt{ay} \end{cases}$$

$$f_{\mathbf{y}}(y) = \frac{f_{\mathbf{x}}(x_1)}{g'(x_1)} + \frac{f_{\mathbf{x}}(x_2)}{|g'(x_2)|} = \frac{f_{\mathbf{x}}(\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}} + \frac{f_{\mathbf{x}}(-\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}}$$

اگر $y < 0$ باشد، آنگاه $f_{\mathbf{y}}(y) = 0$.

یا از روش دیگر داریم:

$$f_{\mathbf{y}}(y)=f_{\mathbf{x}}(x_1(y))\frac{dx_1(y)}{dy}+f_{\mathbf{x}}(x_2(y))\left|\frac{dx_2(y)}{dy}\right|$$

$$x_1(y)=\sqrt{\frac{y}{a}} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dy}x_1(y)=\frac{1}{2\sqrt{ay}} \quad , \quad x_2(y)=-\sqrt{\frac{y}{a}} \Rightarrow \frac{d}{dy}x_2(y)=-\frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

$$f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{f_{\mathbf{x}}(\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}}+\frac{f_{\mathbf{x}}(-\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}}:y>0$$

یا از راه CDF نیز داریم:

$$F_{\mathbf{y}}(y)=P\{\mathbf{y}\le y\}=P\{-\sqrt{\frac{y}{a}}\le \mathbf{x}\le \sqrt{\frac{y}{a}}\}=F_{\mathbf{x}}(\sqrt{\frac{y}{a}})-F_{\mathbf{x}}(-\sqrt{\frac{y}{a}}):y>0$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{f_{\mathbf{x}}(\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}}+\frac{f_{\mathbf{x}}(-\sqrt{\frac{y}{a}})}{2\sqrt{ay}}:y>0$$

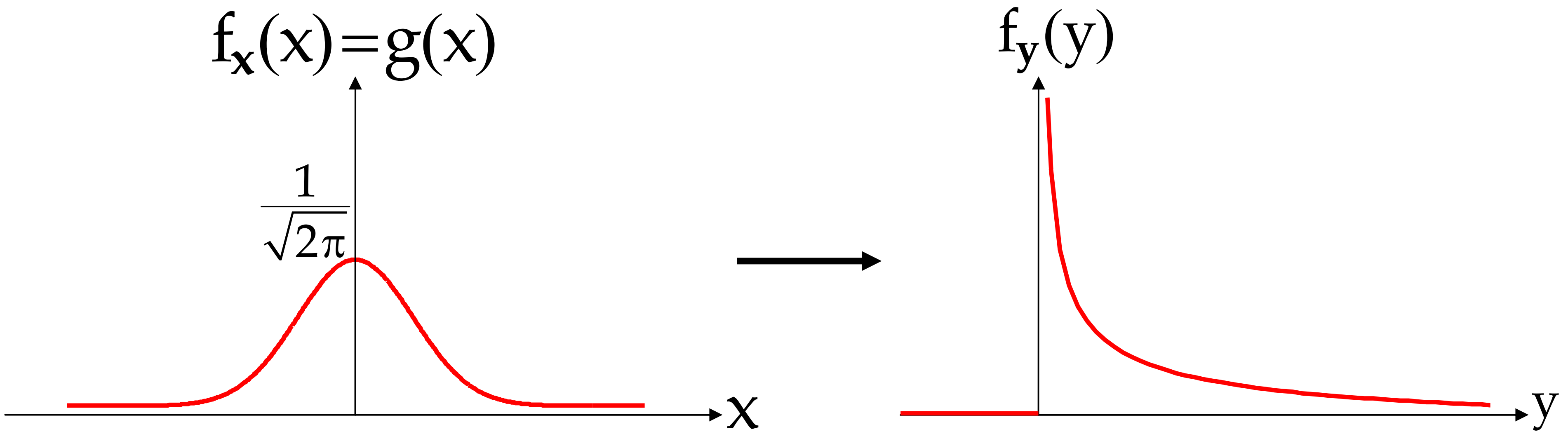
اگر $f_x(x)$ زوج باشد، خواهیم داشت:

$$f_y(y)=\frac{f_x(\sqrt{\frac{y}{a}})}{\sqrt{ay}} : y>0$$

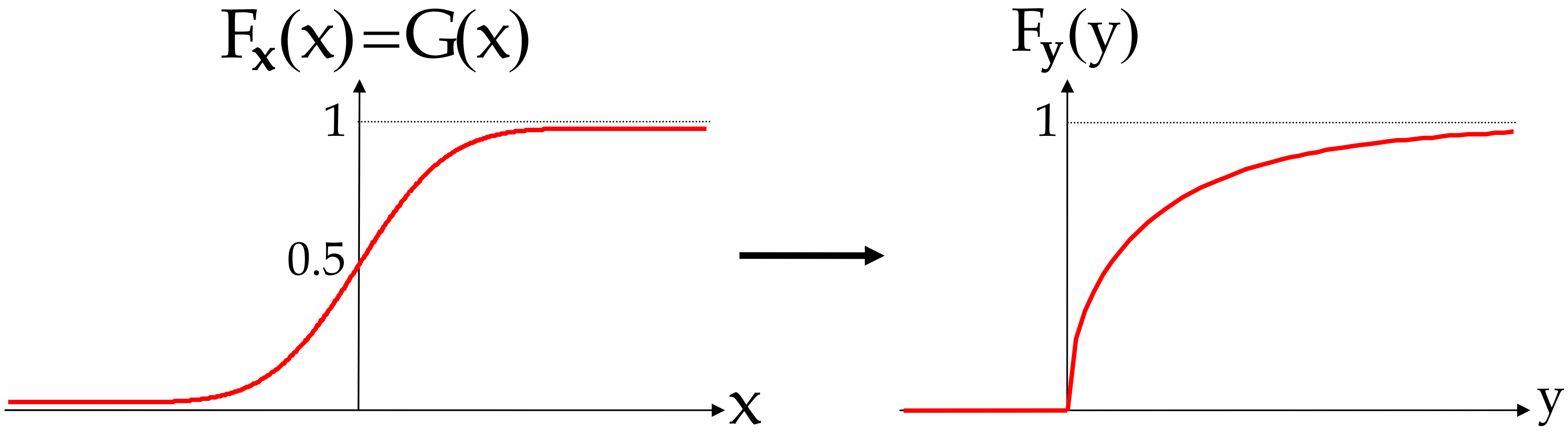
مثلاً اگر $\mathbf{x}\sim N(0,1)$ باشد و فرض کنیم: $a>0$, $\mathbf{y}=a\mathbf{x}^2$، داریم:

$$f_y(y)=\frac{f_x(\sqrt{\frac{y}{a}})}{\sqrt{ay}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi ay}}e^{-\frac{y}{2a}}u(y)$$

که برای $a=1$، همان توزیع χ^2 با یک درجه آزادی است.



$$F_y(y) = 2F_x(\sqrt{\frac{y}{a}}) - 1 = 2G(\sqrt{\frac{y}{a}}) - 1 = D(\sqrt{\frac{y}{a}})$$



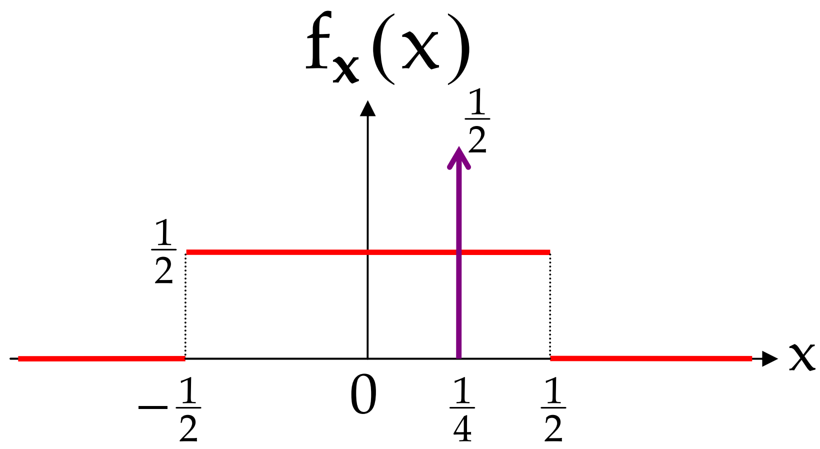
توجه کنید اگر چه در $y=0$، $f_y(y)$ به سمت بی‌نهایت می‌رود، اما در هر محدودهٔ dy، $f_y(y)dy$ احتمال است (محدود و کمتر از یک).

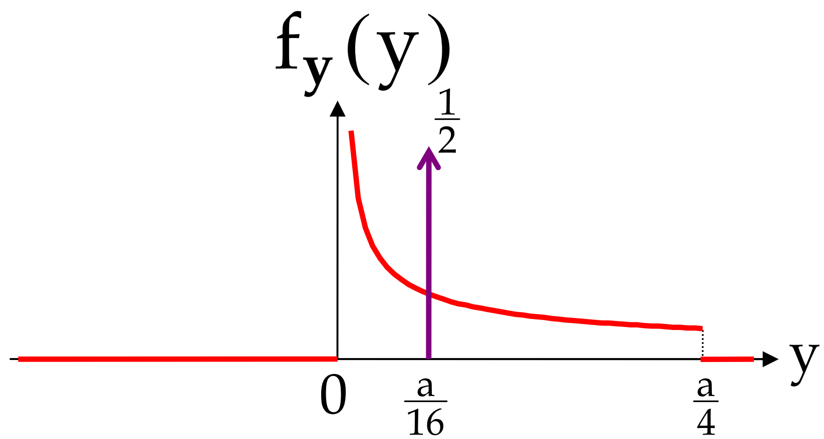
مثال: اگر $a>0$, $\mathbf{y}=a\mathbf{x}^2$ و $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$، $f_{\mathbf{x}}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{4}) & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$، داریم:

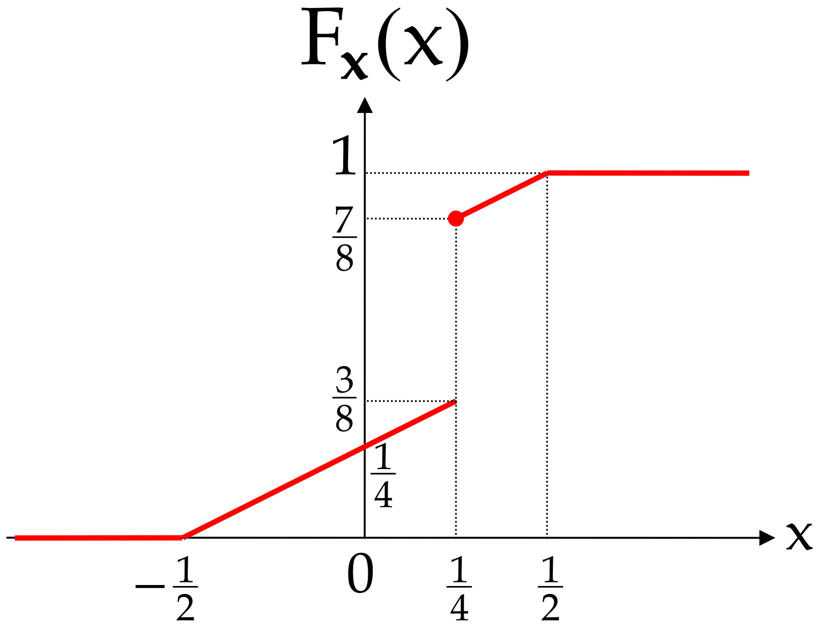
$$y>0\ ,\ \sqrt{\frac{y}{a}}<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<y<\frac{a}{4}$$

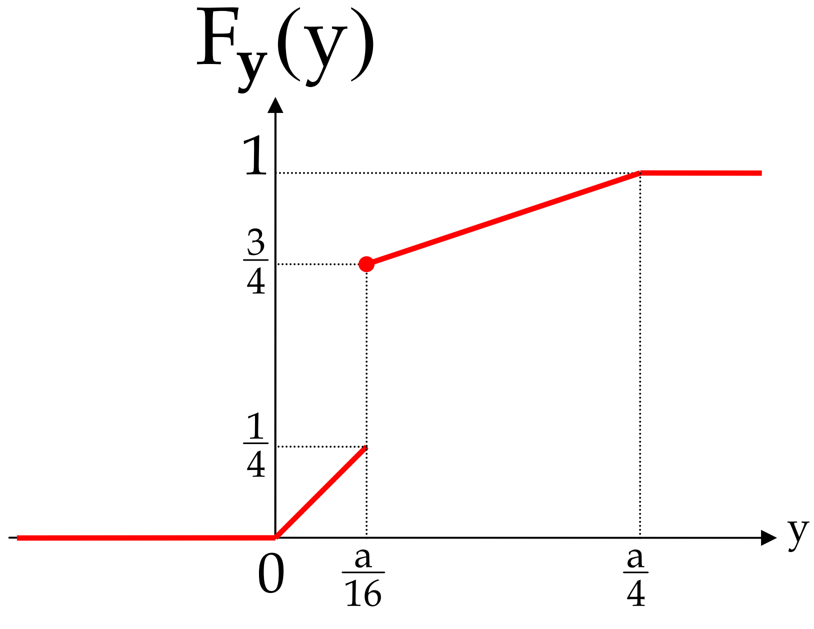
$$f_{\mathbf{y}}(y)=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{ay}}+\underbrace{\frac{1}{2}\delta(y-\frac{a}{16})}_{\downarrow}:0<y<\frac{a}{4}$$

x به احتمال $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{4}$ است،
پس **y** به احتمال $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{a}{16}$ است.





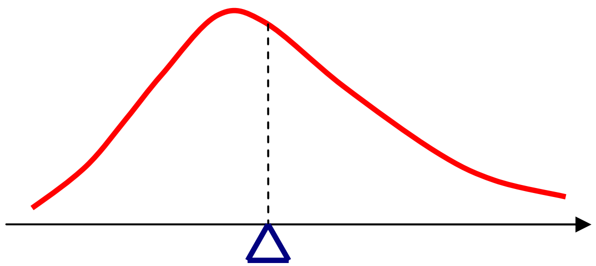

$F_{\mathbf{x}}(x)$
1
$\frac{7}{8}$
$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{4}$
x
$-\frac{1}{2}$
0
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$


$F_{\mathbf{y}}(y)$
1
$\frac{3}{4}$
$\frac{1}{4}$
y
0
$\frac{a}{16}$
$\frac{a}{4}$

میانگین و واریانس یک متغیر تصادفی:

آنچه متغیر تصادفی را به طور کامل مشخص می‌کرد، pdf یا CDF آن بود. دو پارامتر مهم توصیف کنندهٔ یک متغیر تصادفی **میانگین** و **واریانس** آن هستند.

میانگین (Mean) یا امید ریاضی (Expectation):



کمیت زیر را طبق تعریف، میانگین توزیع $\mathbf{x}$ یا میانگین $\mathbf{x}$ یا امید ریاضی $\mathbf{x}$ گویند:

$$\eta = E(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

(در تعریف امید ریاضی فرض می‌شود که $|x| f(x)$ انتگرال‌پذیر باشد، مثلاً وقتی که $\mathbf{x}$ از دو طرف محدود باشد.)

برای حالت گسسته داریم:

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i x_i P_{\mathbf{x}}(x_i) \rightarrow \text{همان تابع احتمال است } P_{\mathbf{x}}(x)$$

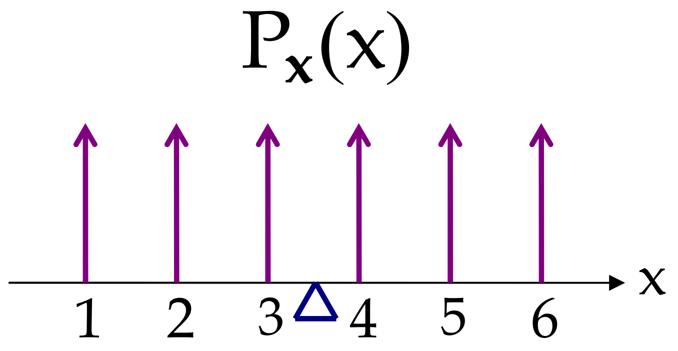
امید ریاضی را با η یا $\eta_{\mathbf{x}}$ (یا μ یا $\mu_{\mathbf{x}}$) نیز نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: اگر برای هر ω، $\mathbf{x}(\omega)=c$ باشد، داریم:

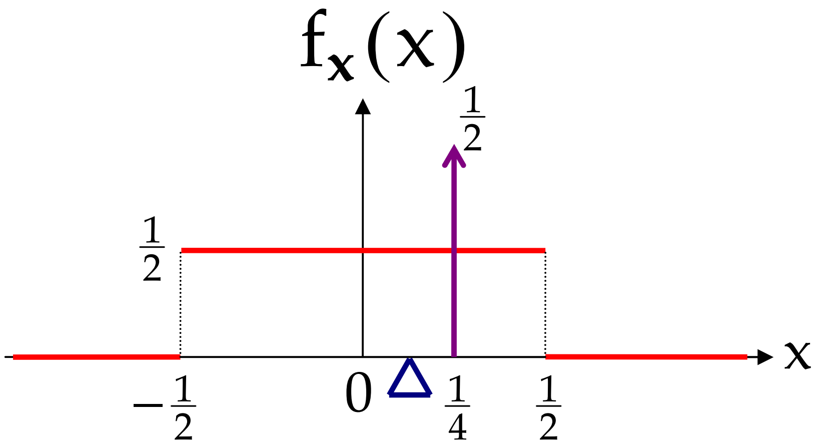
$$E(\mathbf{x}) = c\,P\{\mathbf{x}=c\} = c$$

مثال ۲: در پرتاب تاس اگر $\mathbf{x}(f_i)=i$ تعریف شود، داریم:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$$



مثال ۳: برای این f_x داریم:



$$E(\mathbf{x})=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}x\,dx+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=0+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

تعبیر تجربی امید ریاضی:

اگر $\mathbf{x}$ متغیر تصادفی با مقادیر ممکنه $x_i : i = 1,2,\dots,k$ باشد و nبار آزمایش را انجام دهیم و هر x_i، n_iمرتبه مشاهده شود، داریم:

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_kx_k}{\underbrace{\sum_{i=1}^{k} n_i}_{n}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i \simeq \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = E(\mathbf{x})$$

متوسط حسابی نتایج حاصله :

خواص امید ریاضی:

۱) امید توزیع متقارن:

اگر pdf متغیر تصادفی $\mathbf{x}$ حول نقطهٔ a متقارن باشد و متغیر تصادفی $\mathbf{x}$ دارای میانگین η باشد، آنگاه: $\eta = a$. یعنی:

$\forall x: f_{\mathbf{x}}(a+x) = f_{\mathbf{x}}(a-x) \Rightarrow E(\mathbf{x}) = a$ (در صورت وجود امید ریاضی)

درک شهودی این ویژگی با تعبیر مرکز ثقل کاملاً روشن است. برای اثبات ریاضی داریم:

$$E(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=a+\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)f(x)dx=a+\int_{-\infty}^{a}(x-a)f(x)dx+\int_{a}^{+\infty}(x-a)f(x)dx$$

$$\rightarrow y=x-a\ ,\ z=a-x \Rightarrow E(\mathbf{x})=a-\int_{0}^{+\infty} z\underbrace{f(a-z)}_{f(a+z)}dz+\int_{0}^{+\infty} yf(a+y)dy=a$$

حالت خاص:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow E(\mathbf{x}) = 0$$

(ممکن است pdf حول هیچ نقطه‌ای متقارن نباشد. چنین pdfای را **چاوُله (Skewed)** گویند.)

۲) قضیهٔ اساسی امید ریاضی:

اگر $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ باشد، داریم:

$$E(\mathbf{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\mathbf{y}}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\mathbf{x}}(x) dx$$

(با فرض اینکه $|g(x)| f_{\mathbf{x}}(x)$ انتگرال‌پذیر باشد.)

یعنی لازم نیست که حتماً ابتدا $f_{\mathbf{y}}$ را حساب کنید تا بتوانید $E(\mathbf{y})$ را به دست آورید.

اثبات در کتاب، ص۱۲۴.

در حالت گسسته قضیه فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$E(\mathbf{y}) = \sum_{i} g(x_i) P_{\mathbf{x}}(x_i)$$

نتیجه: خطی بودن امید ریاضی:

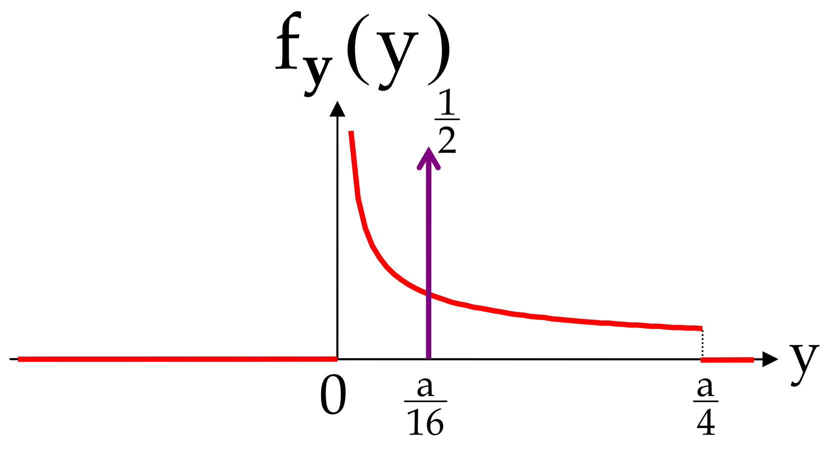
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} a_i g_i(x)) f_{\mathbf{x}}(x) dx = \sum_{i=1}^{n} a_i (\int_{-\infty}^{+\infty} g_i(x) f_{\mathbf{x}}(x) dx) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(g_i(\mathbf{x}))$$

از جمله اینکه داریم:

$$E(a\mathbf{x} + b) = aE(\mathbf{x}) + b$$

مثال: $a>0$, $\mathbf{y}=a\mathbf{x}^2$ و نمودار f_x به صورت مقابل است. $E(\mathbf{y})$ را حساب کنید.

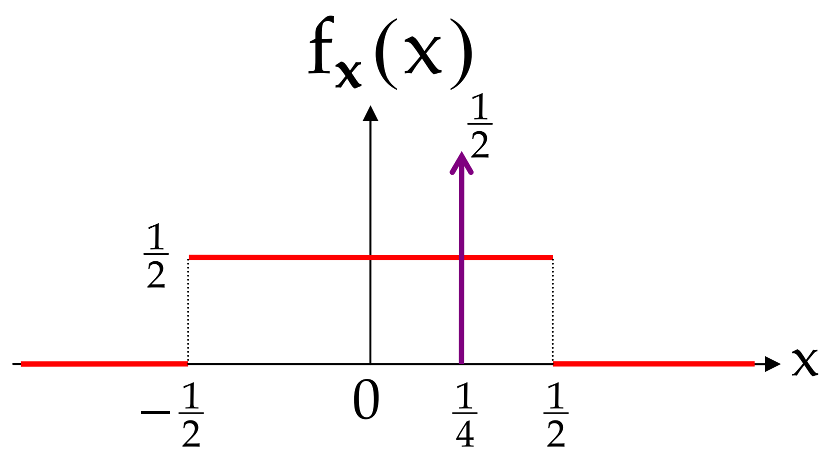
با استفاده از f_y داریم:



$$f_y(y)=\frac{1}{2\sqrt{ay}}+\frac{1}{2}\delta(y-\frac{a}{16}):0<y<\frac{a}{4}$$

$$E(\mathbf{y})=\int_0^{\frac{a}{4}} y\frac{dy}{2\sqrt{ay}}+\frac{1}{2}\times\frac{a}{16}=\frac{a}{24}+\frac{a}{32}=\frac{7a}{96}$$

بدون داشتن f_y نیز می‌توانیم $E(\mathbf{y})$ را محاسبه کنیم:



$$E(Y)=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} ax^2(\frac{1}{2})dx+a(\frac{1}{4})^2(\frac{1}{2})=\frac{a}{24}+\frac{a}{32}=\frac{7a}{96}$$

۳) اگر ثابت a وجود داشته باشد، به طوری‌که: $P\{\mathbf{x} \ge a\} = 1$، آنگاه: $E(\mathbf{x}) \ge a$ و حالت تساوی $(E(\mathbf{x}) = a)$ وقتی برقرار خواهد بود که: $P\{\mathbf{x} = a\} = 1$ ($x = a$ با احتمال یک، $x = a$ تقریباً مطمئن).

اگر ثابت b وجود داشته باشد، به طوری‌که $P\{\mathbf{x} \le b\} = 1$، آنگاه: $E(\mathbf{x}) \le b$ و حالت تساوی $(E(\mathbf{x}) = b)$ وقتی برقرار خواهد بود که: $P\{\mathbf{x} = b\} = 1$.

اثبات در کتاب DeGroot، ص ۱۸۸.

$$E(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{+\infty} xf(x)dx \ge \int_{a}^{+\infty} af(x)dx = a\,P\{\mathbf{x} \ge a\} = a$$

۴) نامساوی مارکف (Markoff's Inequality):

اگر $\mathbf{x}$ یک متغیر تصادفی مثبت باشد (یعنی: $f_{\mathbf{x}}(x) = 0 : x < 0$ یا $P\{\mathbf{x} < 0\} = 0$) و $\alpha > 0$ یک ثابت دلخواه باشد، داریم:

$$P\{\mathbf{x} \ge \alpha\} \le \frac{E(\mathbf{x})}{\alpha}$$

مثلاً اگر $E(\mathbf{x}) = 1$ باشد، توزیع x هر چه باشد، حتماً داریم: $P\{\mathbf{x} \ge 100\} \le 0.01$.

نامساوی مارکف معمولاً برای αهایی که نسبت به $E(\mathbf{x})$ بزرگ باشند، استفاده می‌شود.

(خاصیت قبل را می‌توان حالت خاصی از این نامساوی دانست.)

اثبات:

$$E(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} x f_{\mathbf{x}}(x)dx \geq \int_\alpha^{+\infty} x f_{\mathbf{x}}(x)dx \geq \int_\alpha^{+\infty} \alpha f_{\mathbf{x}}(x)dx = \alpha P\{\mathbf{x} \geq \alpha\}$$

(تساوی وقتی برقرار خواهد بود که x بزرگتر از α نشود و زیر α تنها $x = 0$ می‌تواند دارای احتمال باشد.)

نتیجه: نامساوی Bienayme:

برای هر عدد حقیقی a و برای هر $0 < \varepsilon$ و $n > 0$ داریم:

$$P\{|\mathbf{x} - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|\mathbf{x} - a|^n)}{\varepsilon^n}$$

زیرا:

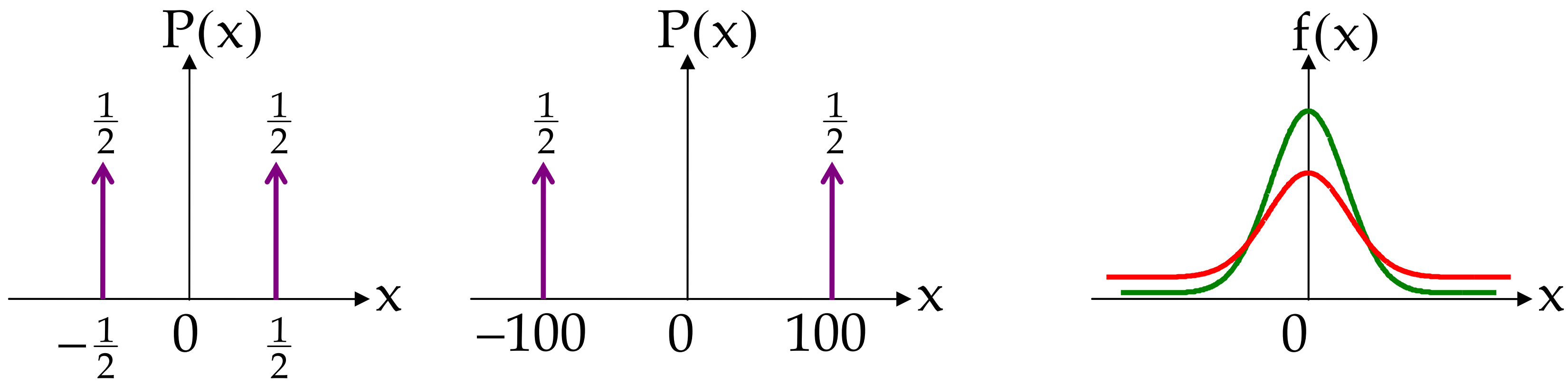
$$P\{|\mathbf{x} - a| \geq \varepsilon\} = P\{|\mathbf{x} - a|^n \geq \varepsilon^n\} \leq \frac{E(|\mathbf{x} - a|^n)}{\varepsilon^n}$$

(طبق قضیه مارکف)

واریانس:

میانگین نشان می‌داد که مقادیر **x** حول و حوش چه مقداری هستند. کمیت دیگری لازم داریم که میزان پراکندگی مقادیر **x** حول مقدار میانگین را به ما نشان دهد. واریانس بیانگر میزان پراکندگی احتمال حول مقدار متوسط (میانگین) است.

میانگین‌ها یکسان، ولی پراکندگی‌ها متفاوت:



تفاوت متغیر تصادفی با میانگین برابر است با: $|\mathbf{x}-\mathrm{E}(\mathbf{x})|$.

طبق تعریف، واریانس توزیع **x** یا واریانس متغیر تصادفی **x** به صورت زیر است:

$\mathrm{var}(\mathbf{x})=\mathrm{E}((\mathbf{x}-\mathrm{E}(\mathbf{x})^2)$ (با فرض وجود این امید ریاضی)

(زیرا کار با آن ساده‌تر از $\mathrm{E}(|\mathbf{x}-\mathrm{E}(\mathbf{x})|)$ است.)

واریانس کمیتی نامنفی است، چون امید ریاضی یک متغیر تصادفی همواره نامنفی است. لذا متداول است که آن را با $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ یا σ^2 نشان می‌دهند:

$$\sigma^2 = \mathrm{E}((\mathbf{x}-\eta)^2)$$

σ را انحراف معیار (Standard Deviation) گویند.

توجه دارید که $\mathrm{var}(\mathbf{x})$ دارای دیمانسیون مربع متغیر تصادفی است. σ از جنس خود متغیر تصادفی است.

از تعریف امید ریاضی برای حالت گسسته نتیجه می‌شود که:

$$\sigma^2 = \sum_{\mathrm{i}} (\mathrm{x_i}-\eta)^2 \mathrm{P}(\mathrm{x_i})$$

خواص واریانس:

۱) $\sigma^2 = E(\mathbf{x}^2) - E^2(\mathbf{x})$؛

$E(\mathbf{x}^2)$ را Mean Square گویند و داریم: $\text{rms (root mean square)} = \sqrt{E(\mathbf{x}^2)}$.

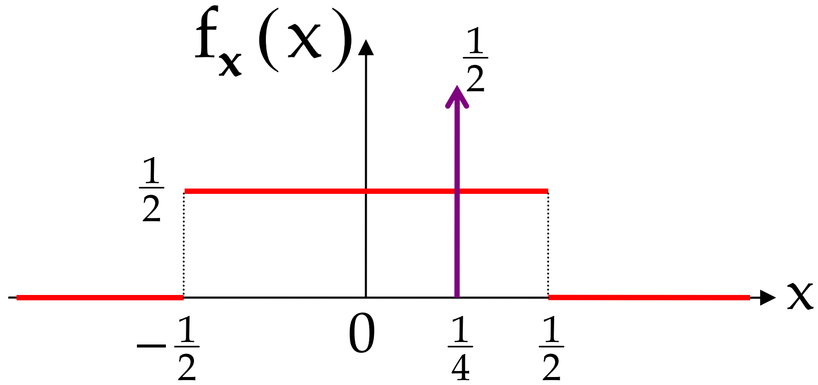
اثبات:

$$\sigma^2 = E((\mathbf{x}-\eta)^2) = E(\mathbf{x}^2 - 2\eta\mathbf{x} + \eta^2) = E(\mathbf{x}^2) - 2\eta E(\mathbf{x}) + \eta^2 = E(\mathbf{x}^2) - \eta^2$$

نتیجهٔ دیگر:

$$E(\mathbf{x}^2) = \sigma^2 + \eta^2$$
$$\Rightarrow E(\mathbf{x}^2) \geq E^2(\mathbf{x})$$

مثال: برای توزیع زیر قبلاً $E(a\mathbf{x}^2)$ را برابر با $\frac{7a}{96}$ به دست آورده بودیم. پس داریم:



$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{8} \quad , \quad E(\mathbf{x}^2) = \frac{7}{96}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{7}{96} - \frac{1}{64} = \frac{11}{192} \Rightarrow \sigma = 0.239$$

۲) اگر $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$ باشد، داریم:

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = a^2 \sigma_{\mathbf{x}}^2$$

اثبات:

$$\sigma_{\mathbf{y}}^2 = E((\mathbf{y} - \eta_{\mathbf{y}})^2) = E((a\mathbf{x} + b - a\eta_{\mathbf{x}} - b)^2) = E(a^2(\mathbf{x} - \eta_{\mathbf{x}})^2) = a^2 \sigma_{\mathbf{x}}^2$$

۳) $\mathrm{var}(\mathbf{x}) = 0$ اگر و تنها اگر عددی مانند η وجود داشته باشد که $P\{\mathbf{x} = \eta\} = 1$ باشد (η همان $E(\mathbf{x})$ خواهد بود).

اثبات در کتاب DeGroot، ص ۱۹۵.

۴) نامساوی چبیشف (Tchebycheff's Inequality):

$$P\{\eta-\varepsilon<\mathbf{x}<\eta+\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

یا:

$$P\{\eta-k\sigma<\mathbf{x}<\eta+k\sigma\}\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

(برای $\varepsilon \ll \sigma$ به خاصیت قبل می‌رسیم.)

اثبات: از نامساوی Bienayme داریم:

$$P\{|\mathbf{x}-a|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E(|\mathbf{x}-a|^n)}{\varepsilon^n}$$

اگر بگیریم: $a=\eta$ و $n=2$ و $\varepsilon=k\sigma$، نتیجه می‌شود:

$$P\{|\mathbf{x}-\eta|\geq k\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow P\{\eta-k\sigma<\mathbf{x}<\eta+k\sigma\}\geq 1-\frac{1}{k^2}$$

که برای هر توزیع **x** صادق است (و می‌توان نشان داد که حد بهتری که برای هر توزیع صادق باشد، وجود ندارد).

محاسبهٔ تقریبی $E(g(\mathbf{x}))$:

$$g(x) \simeq g(\eta_{\mathbf{x}}) + g'(\eta_{\mathbf{x}})(x-\eta_{\mathbf{x}}) + \frac{g''(\eta_{\mathbf{x}})}{2}(x-\eta_{\mathbf{x}})^2$$

$$\Rightarrow E(g(\mathbf{x})) \simeq g(\eta_{\mathbf{x}}) + g''(\eta_{\mathbf{x}})\frac{\sigma_{\mathbf{x}}^2}{2}$$

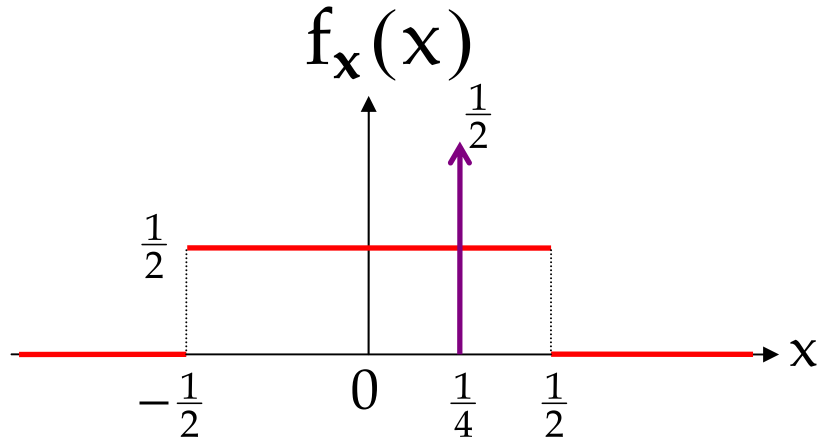
(تقریب بالا، تقریب $g(x)$ به صورت درجهٔ دو است. تقریب بیشتر: $E(g(\mathbf{x})) \simeq g(\eta_{\mathbf{x}})$ که تقریب $g(x)$ به صورت خطی است.)

مثال: در مثالی که داشتیم:

$$g(x) = ax^2 \Rightarrow g''(x) = 2a$$

$$\eta_{\mathbf{x}} = \frac{1}{8} \quad , \quad \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \frac{11}{192}$$

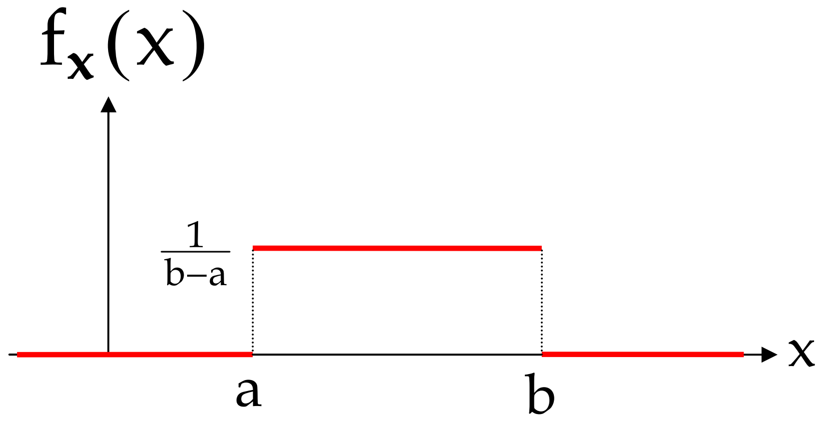
$$\Rightarrow E(g(\mathbf{x})) \simeq \frac{a}{64} + \frac{2a}{2} \times \frac{11}{192} = \frac{a}{64} + \frac{11}{192}a = \frac{14a}{192} = \frac{7a}{96}$$



که دقیقاً برابر مقدار واقعی است که قبلاً حساب کردیم (اگر تابع $g(x)$ از درجهٔ بالاتر بود، اختلاف ظاهر می‌شد).

میانگین و واریانس برخی توزیع‌های خاص:

۱) **توزیع یکنواخت:**

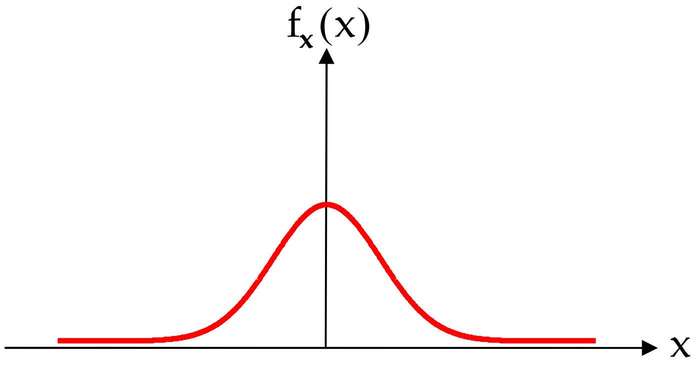


$$E(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathbf{x}}(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

چون این توزیع حول $\frac{a+b}{2}$ متقارن است از قبل نیز می‌توانستیم این را بگوییم.

$$\operatorname{var}(\mathbf{x})=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\eta_{\mathbf{x}})^2 f_{\mathbf{x}}(x)dx=\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

۲) توزیع نرمال:



ابتدا نرمال استاندارد را در نظر می‌گیریم:

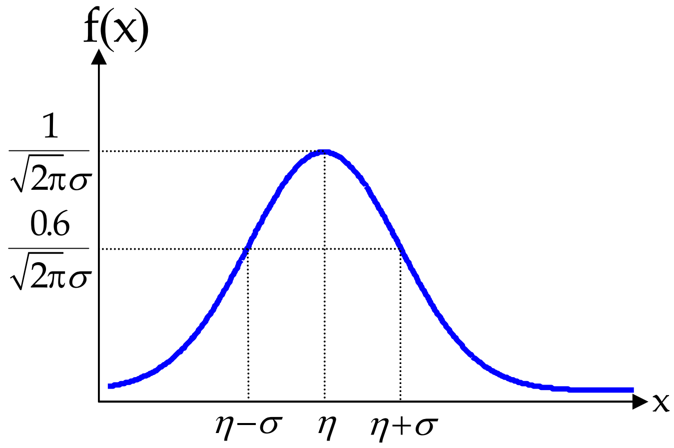
$$\mathbf{z} \sim N(0,1) \rightarrow f_{\mathbf{z}}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

این توزیع زوج است (حول صفر متقارن است) و داریم: $f_{\mathbf{z}}(z) = f_{\mathbf{z}}(-z)$، پس:

$$\eta_{\mathbf{z}} = E(\mathbf{z}) = 0$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{z}) = E((\mathbf{z}-0)^2) = E(\mathbf{z}^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

حال توزیع نرمال را در حالت کلی در نظر می‌گیریم. اگر $\mathbf{x} = a\mathbf{z} + b$ باشد، می‌دانیم که:



$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{|a|} f_{\mathbf{z}}\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

با فرض $a > 0$ خواهیم داشت:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$$

ولی می‌دانیم که:

$$\begin{cases} \eta_{\mathbf{x}} = a\eta_{\mathbf{z}} + b = b \\ \sigma_{\mathbf{x}} = a\sigma_{\mathbf{z}} = a \end{cases}$$

یعنی: $\mathbf{x} \sim N(b,a)$؛ به همین خاطر بود که از ابتدا نتاسیون $N(\eta,\sigma)$ را به کار می‌بردیم.

مثال: نویز حرارتی دارای توزیع گوسی است.

$$\mathbf{x} \sim \mathrm{N}(0,\sigma)$$

$$\eta_{\mathbf{x}} = \mathrm{E}(\mathbf{x}) = 0$$

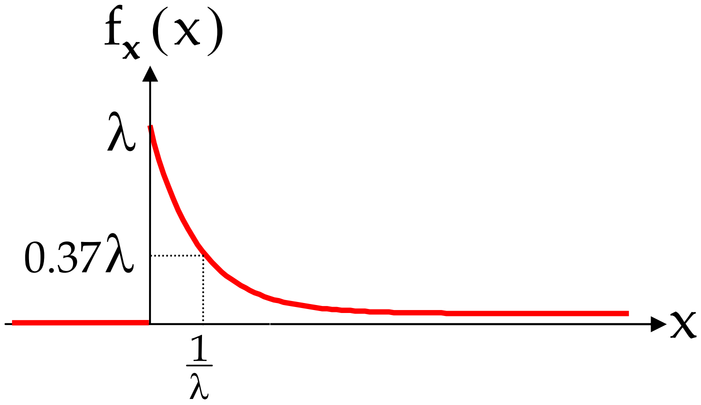
$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathrm{E}((\mathbf{x}-\eta_{\mathbf{x}})^2) = \mathrm{E}(\frac{\mathbf{x}^2}{1\Omega}) = \text{قدرت نویز} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

(هر چه قدرت نویز بیشتر باشد، دامنه‌های بزرگتری می‌تواند داشته باشد.)

برقراری نامساوی چبیشف:

$$\mathrm{P}\{|\mathbf{x}-\eta| < k\sigma\} \geq 1-\frac{1}{k^2} \rightarrow \mathrm{P}\{-2\sigma < \mathbf{x} < 2\sigma\} = 0.954 > 0.75 \;\; \boxed{\checkmark}$$

۳) توزیع نمایی:



$$f_{\mathbf{x}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$$

$$E(\mathbf{x}) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(\mathbf{x}^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow \operatorname{var}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \eta = \sigma = \frac{1}{\lambda}$$

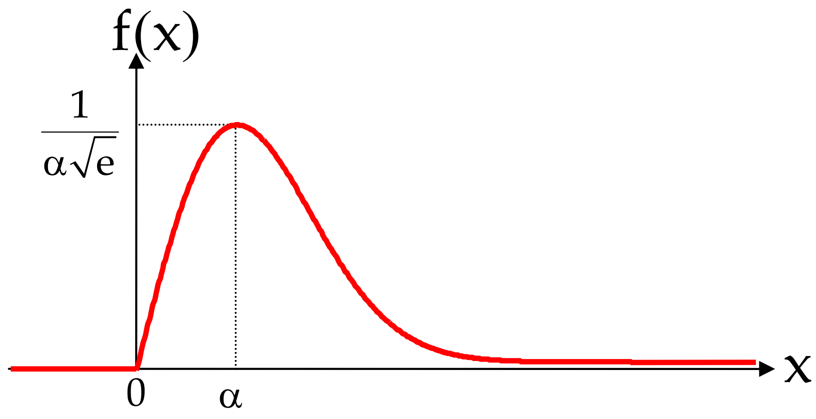
برقراری نامساوی مارکوف: برای $\alpha > 0$ داریم:

$$P\{\mathbf{x} \geq \alpha\} = 1 - F_{\mathbf{x}}(\alpha) = e^{-\lambda\alpha}$$

$$P\{\mathbf{x} \geq \alpha\} \leq \frac{E(\mathbf{x})}{\alpha} \Leftrightarrow e^{-\lambda\alpha} \leq \frac{1}{\lambda\alpha} \quad ☑$$

مثلاً داریم: $e^{-2} < \frac{1}{2}$.

۴) توزیع رایلی:

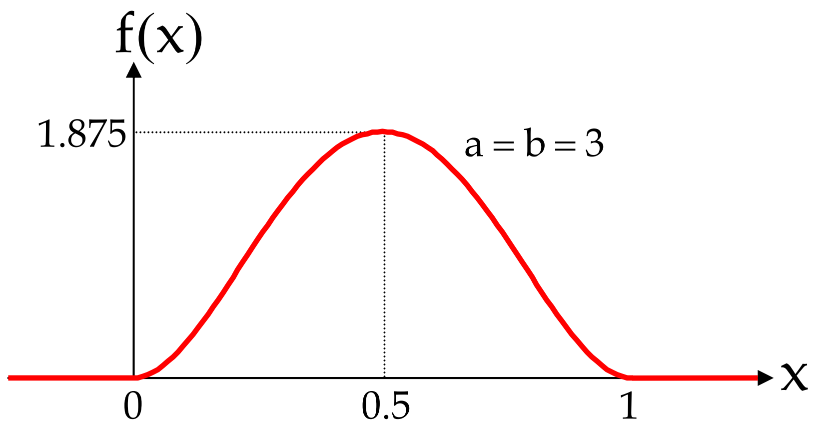


$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \ : x \geq 0$$

می‌توان نشان داد (در تمرین نشان می‌دهید) که:

$$\left.\begin{array}{l} E(\mathbf{x}) = \alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ E(\mathbf{x}^2) = 2\alpha^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{var}(\mathbf{x}) = (2 - \frac{\pi}{2})\alpha^2$$

۵) توزیع بتا:

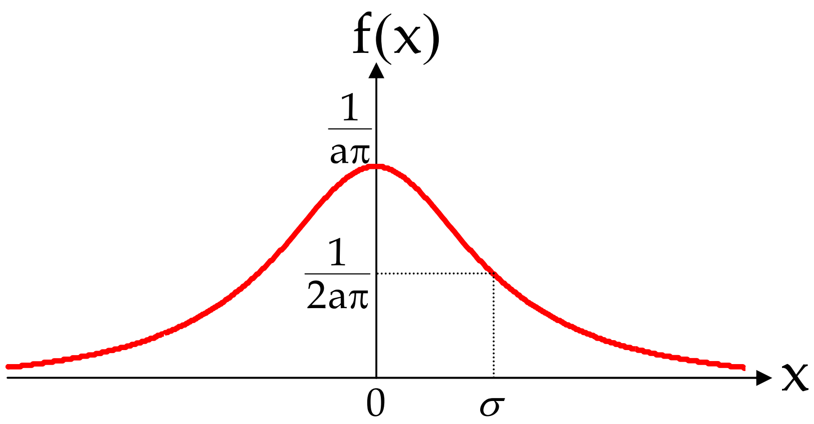


$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

می‌توان نشان داد که:

$$\eta=\frac{a}{a+b}\quad,\quad \sigma^2=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

۶) توزیع کوشی:

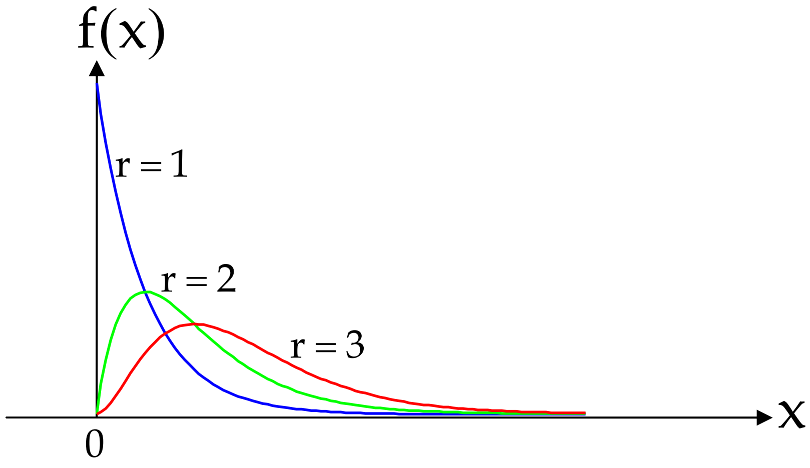


$$f(x)=\frac{\frac{a}{\pi}}{x^2+a^2}$$

برای این توزیع، امید ریاضی و واریانس وجود ندارد.

۷) توزیع گاما:

$$f(x) = A\,x^{r-1}\,e^{-\lambda x}\,u(x) : r > 0, \lambda > 0$$



می‌توان نشان داد که:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{r}{\lambda} \quad , \quad \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \frac{r}{\lambda^2}$$

۸) توزیع پواسن:

$$P\{\mathbf{x}=k\}=e^{-a}\frac{a^k}{k!} : k=0,1,2,\ldots$$

$$E(\mathbf{x})=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,P\{\mathbf{x}=k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}k\,e^{-a}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}\,a\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^a}=a$$

به همین خاطر بود که از پیش به جای a، نام η را به کار برده بودیم. پس وقتی می‌گوییم:

$$P\{\tau\ \text{نقطه در فاصلهٔ}\ k\}=e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$$

$\eta=\lambda\tau$، میانگین تعداد نقاط در فاصلهٔ زمانی τ بوده و λ، میانگین (امید ریاضی) تعداد نقاط در واحد زمان است.

$$E(\mathbf{x}^2)=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2e^{-a}\frac{a^k}{k!}=e^{-a}\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{a^k}{k!}=e^{-a}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{a^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\frac{a^k}{k!}\right)$$

$$=e^{-a}(ae^a+a^2\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{a^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^a})=a^2+a$$

$$\Rightarrow\sigma^2=E(\mathbf{x}^2)-E^2(\mathbf{x})=a^2+a-a^2=a$$

$\rightarrow\eta=\sigma^2=a$ (پارامتر توزیع پواسن)

روش دیگر برای محاسبهٔ $E(\mathbf{x})$ و $E(\mathbf{x}^2)$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}=e^a\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } a}\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{a^{k-1}}{k!}=e^a\xrightarrow{\text{ضرب در } a}\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{a^k}{k!}=ae^a\Rightarrow E(\mathbf{x})=a$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}k\frac{a^{k-1}}{k!}=e^a\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } a}\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\frac{a^{k-2}}{k!}=e^a\xrightarrow{\text{ضرب در } a^2}\sum_{k=0}^{+\infty}k(k-1)\frac{a^k}{k!}=a^2e^a$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{a^k}{k!}=a^2e^a+ae^a\Rightarrow E(\mathbf{x}^2)=a^2+a$$

۹) توزیع برنولی:

$$P_{\mathbf{x}}(k) = P\{\mathbf{x} = k\} = p^k q^{1-k} : k = 0,1$$

$$E(\mathbf{x}) = 0 \times P\{\mathbf{x} = 0\} + 1 \times P\{\mathbf{x} = 1\} = p$$

$$E(\mathbf{x}^2) = 0^2 \times P\{\mathbf{x} = 0\} + 1^2 \times P\{\mathbf{x} = 1\} = p$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}^2) - E^2(\mathbf{x}) = p - p^2 = pq$$

۱۰) توزیع دوجمله‌ای:

$$P_{\mathbf{x}}(k)=P\{\mathbf{x}=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} : k=0,1,\ldots,n$$

می‌توان نشان داد که:

$$\eta=E(\mathbf{x})=np$$
$$\sigma^2=\mathrm{var}(\mathbf{x})=npq$$

(در واقع متغیر تصادفی دوجمله‌ای را می‌توان مجموع nتا متغیر تصادفی برنولی دانست و لذا η و σ^2 این چنین می‌شوند. می‌توان این تساوی‌ها را مستقیماً نیز نشان داد. یک راه دیگر استفاده از رابطهٔ $i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$ است (در کتاب راس، ص ۱۵۲ و ۱۵۳). راه دیگر با استفاده از تابع مشخصه را بعداً خواهیم دید.)

۱۱) توزیع فوق‌هندسی:

$$P_{\mathbf{x}}(k) = P\{\mathbf{x} = k\} = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}} : \max(0, n-N+K) \le k \le \min(n, K) \quad , \quad p = \frac{K}{N}$$

می‌توان نشان داد که:

$$E(\mathbf{x}) = n\frac{K}{N} = np$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{x}) = \underbrace{\frac{nK(N-K)}{N^2}}_{npq} \times \frac{N-n}{N-1}$$

۱۲) توزیع دوجمله‌ای منفی:

$$P_{\mathbf{x}}(k) = P\{\mathbf{x} = k\} = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k : k = 0,1,2,\ldots$$

می‌توان نشان داد که:

$$E(\mathbf{x}) = \frac{rq}{p}$$

$$\mathrm{var}(\mathbf{x}) = \frac{rq}{p^2}$$

Section 5.2

گشتاورهای یک متغیر تصادفی (Moments of a RV):

میانگین و واریانس اعدادی بودند که تا حدودی توصیفی از متغیر تصادفی را به دست می‌دادند. در حالت کلی‌تر گشتاور (گشتاور ابتدایی (Initial)) مرتبهٔ nام متغیر تصادفی $\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_n = E(\mathbf{x}^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx$$

و گشتاور مرکزی مرتبهٔ nام متغیر تصادفی $\mathbf{x}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_n = E((\mathbf{x}-\eta)^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\eta)^n f(x) dx$$

روشن است که:

$$\eta = m_1 \ , \ \ \sigma^2 = \mu_2 \ , \ \ \mu_1 = 0 \ , \ \ \mu_0 = m_0 = 1$$

همچنین $E(|\mathbf{x}|^n)$ را گشتاور مطلق مرتبهٔ nام و $E(\mathbf{x}-a)$ را گشتاور $\mathbf{x}$ حول نقطهٔ a (گشتاور تعمیم‌یافته) گویند. اگر $f(x)$ زوج باشد، $\eta = 0$ و لذا: $m_n = \mu_n$ و همچنین داریم: $\mu_{2n+1} = 0$. اصولاً اگر $f(x)$ حول نقطه‌ای متقارن باشد، داریم: $\mu_{2n+1} = 0$.

مثال: گشتاور مرتبهٔ nام توزیع گاما:

$$f(x)=\frac{\lambda^{r}x^{r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}u(x)$$

$$m_n=E(\mathbf{x}^n)=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{r}x^{n+r-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}dx=\frac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}x^{n+r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda^{r}}{\Gamma(r)}\frac{\Gamma(n+r)}{\lambda^{n+r}}=\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(r)\lambda^{n}}$$

$$\Rightarrow \eta=E(\mathbf{x})=\frac{r}{\lambda}$$

$$\Rightarrow E(\mathbf{x}^2)=\frac{r(r+1)}{\lambda^2}\Rightarrow \sigma^2=\frac{r}{\lambda^2}$$

تابع مولد گشتاور و تابع مشخصه:

در کاربردهای مختلفی از جمله محاسبهٔ گشتاورهای یک متغیر تصادفی، تابع مولد گشتاور (یا تابع مشخصه) کمک می‌کند.
طبق تعریف، تابع مولد گشتاور (Moment Generating Function) متغیر تصادفی **x** عبارت است از:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(s) = E(e^{s\mathbf{x}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

(البته برای sهایی که این انتگرال وجود داشته باشد.)

یعنی تابع مولد گشتاور، همان تبدیل لاپلاس تابع چگالی است (با تبدیل s به s-).

در حالت گسسته، تابع مولد گشتاور به مجموع زیر تبدیل می‌شود:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(s) = E(e^{s\mathbf{x}}) = \sum_{i} e^{sx_i} P_{\mathbf{x}}(x_i)$$

خواص تابع مولد گشتاور:

۱) **قضیهٔ گشتاور:** اصولاً علت اینکه به این تابع، مولد گشتاور می‌گویند، این است که:

$$m_n = E(\mathbf{x}^n) = \Phi^{(n)}(0)$$

یعنی مشتق nام تابع در نقطهٔ صفر، گشتاور nام را می‌دهد.

اثبات:

$$\frac{d^n\Phi(s)}{ds^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{sx} f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^n\Phi(s)}{ds^n}\right|_{s=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{\mathbf{x}}(x)dx = m_n$$

برای $n=0$ نتیجه می‌شود که: $\Phi(0) = m_0 = 1$، زیرا:

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mathbf{x}}(x)dx = 1$$

۲) اگر $\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b$ باشد، داریم:

$$\Phi_{\mathbf{y}}(s) = e^{bs}\Phi_{\mathbf{x}}(as)$$

زیرا:

$$\Phi_{\mathbf{y}}(s) = E(e^{(a\mathbf{x}+b)s}) = e^{bs}\,E(e^{as\mathbf{x}}) = e^{bs}\Phi_{\mathbf{x}}(as)$$

۳) اگر $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$، بدون نیاز به محاسبهٔ $f_{\mathbf{y}}$ می‌توان $\Phi_{\mathbf{y}}(s)$ را محاسبه کرد:

$$\Phi_{\mathbf{y}}(s) = E(e^{sy}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sy} f_{\mathbf{y}}(y)dy \underset{\boxed{\text{طبق قضیهٔ اساسی امید ریاضی}}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s\,g(x)} f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

مثال: توزیع نمایی:

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}u(x)$$

$$\Phi(s)=\int_0^{+\infty} e^{sx}\,\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-s)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-s}:\mathrm{Re}(s)<\lambda$$

از جداول تبدیل لاپلاس داریم:

$$e^{-\lambda t}u(t)\xleftrightarrow{\text{Laplace}}\frac{1}{s+\lambda}:\mathrm{Re}(s)>-\lambda$$

پس با تبدیل s به s- خواهیم داشت:

$$\mathrm{Re}(-s)>-\lambda\Rightarrow \mathrm{Re}(s)<\lambda$$

$$\Rightarrow\Phi(s)=\frac{\lambda}{\lambda-s}:\mathrm{Re}(s)<\lambda$$

در خیلی از موارد محاسبهٔ گشتاور از این راه ساده‌تر است.

مثال: توزیع دوجمله‌ای:

$$P(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} : k=0,1,\dots,n$$

محاسبهٔ مستقیم η و σ^2 نسبتاً مشکل است.

$$\Phi(s)=\sum_i e^{sx_i}P(x_i)=\sum_{k=0}^{n}e^{sk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^s)^k q^{n-k}=(pe^s+q)^n$$

$$\eta=\left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0}=n\,(pe^s+q)^{n-1}\left.pe^s\right|_{s=0}=n\,(p+q)^{n-1}\,p=np$$

$$E(\mathbf{x}^2)=\left.\frac{d^2\Phi(s)}{ds^2}\right|_{s=0}=npq+n^2p^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2=npq$$

تابع مشخصه:

طبق تعریف، تابع مشخصهٔ متغیر تصادفی $\mathbf{x}$ عبارت است از:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(j\omega) = E(e^{j\omega\mathbf{x}}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f_{\mathbf{x}}(x)dx$$

یعنی همان $\Phi_{\mathbf{x}}(s)$ که به جای s، $j\omega$ قرار گرفته است.

پس همان خواص $\Phi(s)$ را دارد و گاهی اوقات نیز آن را با $\Phi(\omega)$ نشان می‌دهیم.

تابع مشخصه در واقع تبدیل فوریهٔ pdf است (با تبدیل ω به $-\omega$).

با توجه به رابطهٔ عکس تبدیل فوریه داریم:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} \Phi_{\mathbf{x}}(j\omega)d\omega$$

پس می‌توان f را از روی Φ و Φ را از روی f به دست آورد (تابع مشخصه یگانه است و با داشتن آن، متغیر تصادفی به طور کامل مشخص شده است).

به راحتی ملاحظه می‌شود که:

$$m_n = \left.\frac{d^n\Phi(j\omega)}{d(j\omega)^n}\right|_{j\omega=0} = \frac{1}{j^n}\left.\frac{d^n\Phi(j\omega)}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}$$

(اگر تمام گشتاورها را داشته باشیم، تمام مشتقات Φ را در نقطهٔ صفر داریم. پس با بسط مک‌لورن Φ، $\Phi(\omega)$ را برای هر ω داریم و اگر Φ معلوم باشد، f نیز معلوم است.)

<u>بسط مک‌لورن Φ:</u>

$$\Phi(\omega) = 1 + j\omega m_1 + \cdots + \frac{(j\omega)^i}{i!}m_i + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(j\omega)^n}{n!}m_n$$

مثال: برای توزیع نمایی با پارامتر λ داریم:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega} \quad \left(e^{-\lambda t}u(t) \xleftrightarrow{\mathfrak{I}} \frac{1}{\lambda + j\omega} : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\right)$$

مثال: برای $\mathbf{x} \sim N(\eta,\sigma)$، $\Phi_{\mathbf{x}}$ را پیدا کنید.

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}-\eta}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\Phi_{\mathbf{z}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \qquad \rightarrow j\omega z - \frac{z^2}{2} = -\frac{1}{2}(z-j\omega)^2 - \frac{\omega^2}{2}$$

$$= e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-j\omega)^2}{2}} dz = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

اصولاً به یاد داشته باشید که:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \xleftrightarrow{\mathfrak{I}} e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

پس اکنون برای $\mathbf{x} = \sigma\mathbf{z} + \eta$ داریم:

$$\Phi_{\mathbf{x}}(j\omega) = e^{j\omega\eta}\Phi_{\mathbf{z}}(j\omega\sigma) = e^{j\omega\eta - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

بهتر است که این رابطه را به خاطر بسپارید.

مثال: برای $\mathbf{x} \sim N(\eta,\sigma)$، μ_nها را پیدا کنید.

$$\mathbf{x} \sim N(\eta,\sigma) \Rightarrow \mathbf{z} = \frac{\mathbf{x}-\eta}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\mu_n(\mathbf{x}) = E((\mathbf{x}-\eta)^n) = \sigma^n E((\frac{\mathbf{x}-\eta}{\sigma})^n) = \sigma^n m_n(\mathbf{z})$$

$$(\frac{1}{j})^n = (-j)^n$$

$$m_n(\mathbf{z}) = \frac{1}{j^n}\frac{d^n}{d\omega^n}(e^{-\frac{\omega^2}{2}})\Big|_{\omega=0} = j^n(-1)^n\frac{d^n}{d\omega^n}(e^{-\frac{\omega^2}{2}})\Big|_{\omega=0}$$

چندجمله‌ای هرمیت:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}})$$

$$H_0(x) = 1\ ,\ H_1(x) = x\ ,\ H_2(x) = x^2-1\ ,\ H_3(x) = x^3-3x\ ,\ H_4(x) = x^4-6x^2+3\ ,\ \ldots$$

چندجمله‌ای هرمیت دارای ویژگی‌های زیر است:

$$H_{k+1}(x) = xH_k(x) - kH_{k-1}(x)$$

$$H_n(x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2} + 1\times 3\binom{n}{4}x^{n-4} \mp \cdots$$

پس:

$$m_n(\mathbf{z}) = j^n H_n(0)$$

از طرفی داریم:

$$H_n(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \times 1\times 3\times\cdots\times(n-1) & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

پس:

$$m_n(\mathbf{z})=\begin{cases}1\times3\times\cdots\times(n-1) & \text{زوج } n\\ 0 & \text{فرد } n\end{cases}$$

و لذا:

$$\mu_n(\mathbf{x})=\begin{cases}1\times3\times\cdots\times(n-1)\times\sigma^n & \text{زوج } n\\ 0 & \text{فرد } n\end{cases}$$

مثلاً داریم: $\mu_4=4\sigma^4$.

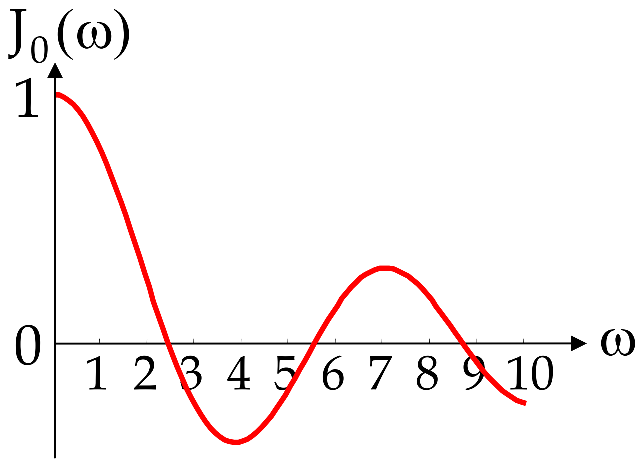
در اینجا حساب کردن گشتاور از این راه چندان ساده‌تر نبود، ولی در خیلی موارد ساده‌تر می‌شود (راه مستقیم در کتاب، ص ۱۵۱).

مثال: اگر $x \sim a\sin(\Omega t+\theta)$ و $\theta \sim u(0,2\pi)$، $\Phi_x(j\omega)$ را حساب کنید.

با توجه به خاصیت ۳ داریم:

$$\Phi_x(j\omega)=\int_0^{2\pi} e^{j\omega a\sin(\Omega t+\theta)}\overbrace{f_\theta(\theta)}^{\frac{1}{2\pi}}d\theta \qquad \to u=\Omega t+\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega t}^{\Omega t+2\pi} e^{j\omega a\sin u}du=J_0(\omega a)$$: تابع بسل نوع اول مرتبهٔ صفر



تابع بسل نوع اول مرتبهٔ n:

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_c^{c+2\pi} e^{-jnu+jx\sin u}du$$