

بسمه تعالی

درس فرایندهای تصادفی

تکلیف شماره ۶

۱- اگر $R_s(\tau) = Ie^{-|\tau|/T}$ بوده و $\widehat{E}\{s(t-T/2)|s(t), s(t-T)\} = as(t) + bs(t-T)$ باشد، مقادیر ثابت a و b و خطای متوسط مجذور تخمین را حساب کنید.

۲- نشان دهید که اگر به ازای $|\omega| > \sigma = \pi/T$ ، $S_x(\omega) = 0$ باشد، آنگاه تخمین خطی $x(t)$ بر حسب نمونه های $x(nT)$ بصورت زیر خواهد بود

$$\widehat{E}\{x(t)|x(nT), N = -\infty, \dots, \infty\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\sigma(t-nT))}{\pi(t-nT)} x(nT)$$

و خطای متوسط مجذور برابر صفر خواهد بود.

۳- دنباله تصادفی X_n را مارتینگل می نامیم اگر $E\{X_n = 0\}$ و $E\{X_n | X_{n-1}, \dots, X_1\} = X_{n-1}$

نشان دهید که اگر متغیرهای تصادفی Y_n دارای متوسط صفر و مستقل باشند، آنگاه مجموع آنها $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ مارتینگل خواهد بود.

۴- دنباله تصادفی X_n را مارتینگل به مفهوم عام (wide sense martingale) می گوئیم هر گاه

$$E\{X_n | X_{n-1}, \dots, X_1\} = X_{n-1}$$

الف: نشان دهید دنباله X_n مارتینگل به مفهوم عام است هرگاه بتوان آنرا به صورت مجموع $X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ نوشت که در آن متغیرهای تصادفی Y_n متعامد هستند.

ب: نشان دهید که اگر دنباله X_n مارتینگل به مفهوم عام باشد، آنگاه

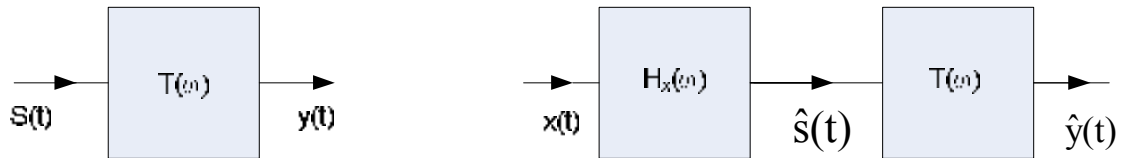
$$E\{X_n^2\} \geq E\{X_{n-1}^2\} \geq \dots \geq E\{X_1^2\}$$

توجه: $X_n - X_{n-1} \perp X_{n-1}$ و $X_n = X_n - X_{n-1} + X_{n-1}$

۵- تخمین گرهای غیر کازال $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ از یک فرایند $s(t)$ و مشتق آن $s'(t)$ را بر حسب اطلاعات $x(t) = s(t) + v(t)$ پیدا کنید. داریم

$$R_s(\tau) = A \frac{\sin^2 a\tau}{\tau^2} \quad R_v(\tau) = N \delta(\tau) \quad R_{sv}(\tau) = 0$$

۶- تخمین گره‌های غیر کازال ورودی $s(t)$ و خروجی $y(t)$ از یک سیستم $T(\omega)$ را بر حسب دیتای $x(t)$ را با $H_s(\omega)$ و $H_y(\omega) = H_s(\omega)T(\omega)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید که



۷- الف- دنباله h_n را طوری بیابید که معادلات زیر را ارضا نماید

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k R_{m-k} = R_{m+1} \quad m \geq 0 \quad R_m = \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}$$

ب: تابع $H(z)$ یک تابع کسری است که قطب‌های آن داخل دایره واحد است. تابع $Y(z)$ تابعی کسری است که قطب‌های آن خارج دایره واحد است. تابع $H(z)$ و $Y(z)$ را بگونه‌ای بیابید که

$$[H(z)-z] \frac{70-25(z+z^{-1})}{6(z+z^{-1})^2-35(z+z^{-1})+50} = Y(z)$$

ج: از دو قسمت الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۷- اگر $\hat{\epsilon}_N(n)$ و $\check{\epsilon}_N(n)$ خطاهای پیشرو و پسرو دنباله $s(n)$ باشند، موارد زیر را نشان دهید.

الف: $\hat{\epsilon}_N(n) \perp \hat{\epsilon}_{N+m}(n+m)$ ب: $\check{\epsilon}_N(n) \perp \check{\epsilon}_{N+m}(n-m)$ ج: $\hat{\epsilon}_N(n) \perp \check{\epsilon}_{N+m}(n-N-m)$

۸- برای فرایند $x(n) = s(n) + v(n)$ و به ازای

$$R_s(m) = 5 \times .8^{|m|} \quad R_v(m) = 5\delta(m) \quad R_{sv}(m) = 0$$

تخمین گر و خطای تخمین را در موارد زیر پیدا نمایید.

الف- فیلتر غیر علی $s(n)$ ب: فیلتر علی $s(n)$ ج: تخمین $s(n+1)$ بر حسب $s(n)$ و گذشته آن د: تخمین $s(n+1)$ بر حسب $x(n)$ و گذشته آن

۹- تخمین کالمن $\hat{S}_0(n) = E \{S(n) | S(k) + v(k), 0 \leq k \leq n\}$ از فرایند $s(n)$ و خطای

$$P_n = E \left\{ [S(n) - \hat{S}_0(n)]^2 \right\}$$

را به ازای شرایط زیر بیابید

$$R_s(m) = 5 \times .8^{|m|} \quad R_v(m) = 5\delta(m) \quad R_{sv}(m) = 0$$

۱۰- تخمین کالمن $\hat{S}_0(t) = E \{S(t) | S(\tau) + v(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ از فرایند $s(t)$ و خطای

$$P(t) = E \left\{ [S(t) - \hat{S}_0(t)]^2 \right\}$$

را به ازای شرایط زیر بیابید

$$R_s(\tau) = 5e^{-0.2|\tau|} \quad R_v(\tau) = \frac{10}{3}\delta(\tau) \quad R_{sv}(\tau) = 0$$