اصول ادوات حالت جامد - پاییز ۹۷ - تمرین شماره ۲ و ۳ [مسائل ستاره دار اختیاری است!]

۱. قانون اقدام جمعی (Law of Mass Action)

الف) در درس گفته شد که توزیع چگالی حالت برای الکترون ها و حفره ها در یک ماده نیمه هادی با جهت انرژی از نوار باند نسبت دارد یعنی $g_c(E) \propto \sqrt{E-E_c}$ و $g_v(E) \propto \sqrt{E_v-E}$ اگر ثابت های تناسب را به ترتیب k_c و k_v بنامیم. نشان دهید حاصلضرب $n \times p$ مستقل از موقعیت تراز فرمی است.

تابع توزیع فرمی دیراک $f(E)$ و راهنمایی $\begin{cases} n = \int_{E_c}^{\infty} g_c(E) f(E) dE \\ p = \int_{-\infty}^{E_v} g_v(E)(1-f(E)) dE \end{cases}$

$\int_0^{\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx = \sqrt{\pi}/2$ تابع توزیع فرمی دیراک را می توانید تقریب نمایی بزنید

ب) حال اگر خرب $np = n_i^2$ را در دمای اتاق بدانیم و فرض $k_c = k_v$، مقدار k_c را در دمای اتاق برای Si محاسبه کنید (بازگر دیمانسیون) فرض کنید $\left(n_i(Si)\Big|_{T=300^K} = 1.5 \times 10^{10}\ cm^{-3}\right)$

۲. اصل عدم قطعیت هایزنبرگ چیست و کاربرد آن!

در کلاس بحث شد که می توان برای هر ذره ای را با دقت اصل عدم قطعیت (و بدون نیاز به حل معادله شرودینگر) می توان تحلیل نمود.

در این سوال قصد داریم شعاع (ابعاد) یک اتم را با اصل عدم قطعیت تخمین بزنیم. فرض کنید الکترون در محدوده شعاعی گرفتار شده و بنابراصل عدم قطعیت هرچه این شعاع کوچک تر باشد انرژی جنبشی مجبور است بزرگ تر باشد از طرفی انرژی پتانسیل الکترون ستاتیکی کمتری می شود لذا انتظار می رود انرژی کل الکترون (مجموع جنبشی و پتانسیل) در شعاعی کمینه می شود. عدد تان را با شعاع اتمی واقعی (مثلاً برای H) مقایسه کنید.

۳. توصیف معنای احتمالاتی جوابهای معادله شرودینگر و عدم قطعیت

ذره ای را در نظر بگیرید که در آنی معادله موج $\psi(x) = A e^{-ax^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ رفتار ذره را توصیف می کند.

(توضیح می دهیم که معادله موج در واقعیت با یک نوسانگر هماهنگ انیشتنی است)

الف) مقدار A را بدست آورید.

ب) $\langle x \rangle$ و $\langle x^2 \rangle$ و از روی آن σ_x را محاسبه کنید.

ج) $\langle p \rangle$ و $\langle p^2 \rangle$ و از روی آن σ_p را محاسبه کنید.

د) نشان دهید با تغییر a می توان σ_x و σ_p را به دلخواه کوچک کرد ولی امید و اهمرمان می توان کوچک کرد. حالا ضرب $\sigma_x \cdot \sigma_p$ را بدست آورید.

۴. اپراتور مومنتوم و قانون دوم نیوتن

نشان دهید $\frac{d\langle x \rangle}{dt} = -j\frac{\hbar}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi \, dx$ و با استفاده از آن $\frac{d\langle p \rangle}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right) \psi \, dx$

اگر $-\frac{\partial V}{\partial x}$ را به نیرو تعبیر کنیم آیا می توان این رابطه را معادل قانون دوم نیوتن دانست.

(راهنمایی: از معادله شرودینگر وابسته گیری خود به جز استفاده کنید)

۵. چاه پتانسیل ایده‌آل و مفاهیم کوانتومی

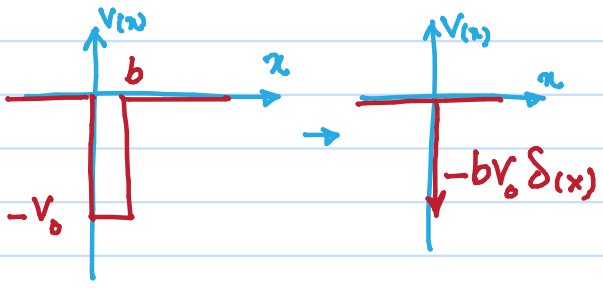
ذره‌ای به جرم m در یک چاه پتانسیل ایده‌آل به عرض L گرفتار شده و تابع موج $\psi(x) = Ax(L-x)$ ذره را توصیف می‌کند.

الف) مقدار A را به دست آورید.

ب) توزیع احتمال برای هرکدام از انرژی‌های مجاز ذره و میانگین انرژی ذره را به دست آورید.

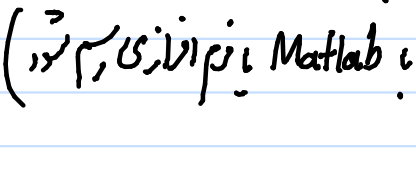
ج) فرض کنید انرژی اندازه‌گیری شده $E = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ باشد. مکان متوقع و متوسط مکان ذره دقیقاً بعد از اندازه‌گیری کجاست؟ (راهنمایی: ψ را برحسب ψ_nها بسط دهید)

۶. انرژی‌های پیوند و پادپیوند



الکترون متعلق به اتم را می‌توان به ذره‌ای گرفتار شده در چاه پتانسیل تشبیه نمود. فرض کنید پتانسیل یکبعدی همه جا صفر و در فاصله b مطابق شکل روبرو $-V_0$ است. برای ساده‌سازی حالت حدی $V_0 \to \infty$ $b \to 0$ به نحوی که bV_0 ثابت است را مطابق شکل جایگزین مسأله کنید. به عبارتی $V(x) = -bV_0\,\delta(x)$

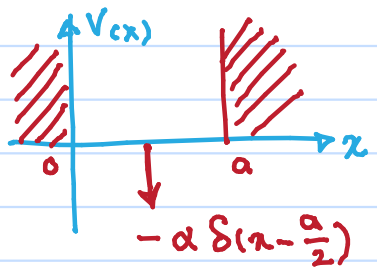
الف) با حل معادله شرودینگر نشان دهید که الکترون متعلق در این وضعیت تنها یک انرژی مجاز دارد. E را به دست آورید. (دقت کنید در اینجا معادله E منفی است!) شکل تابع موج را به دست آورید.



ب) نزدیک شدن اتم دیگری را می‌توان مطابق شکل روبرو با تابع ضربه دیگری در فاصله a مدل کرد. نشان دهید انرژی‌های مجاز تقریباً به دو انرژی $E-\Delta E$ و $E+\Delta E$ تبدیل می‌شوند. ΔE را به دست آورید. شکل تابع موج متناظر هرکدام از انرژی‌ها را رسم کنید.

(*) ۷. تونل‌زنی

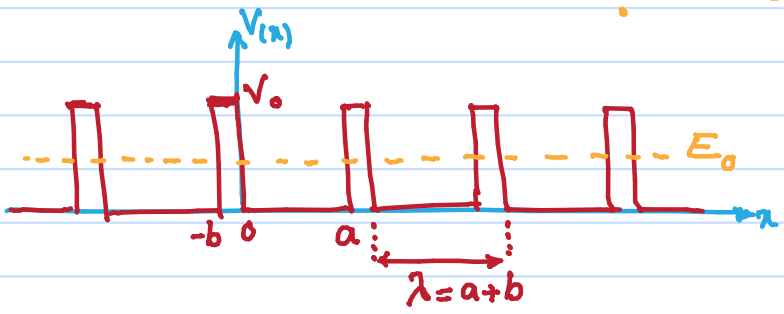
ذره‌ای به جرم m و انرژی E به سمت دیواری به ارتفاع پتانسیل V_0 و عرض b پرتاب شده. احتمال عبور ذره (T) را برحسب E برای $0 < E < 10V_0$ و به ازای $\beta = 2,5$ رسم کنید. $\left(\beta = \frac{b\sqrt{3mV_0}}{\hbar}\right)$. در حالتی که $E = V_0$. وضعیت احتمال عبور چقدر است. و به چه پارامترهایی بستگی دارد.



(*) ۸. ناخالصی در چاه کوانتومی

فرض کنید در یک چاه کوانتومی را می‌توان با تابع ضربه‌ای در میانه چاه و به وزن $-\alpha$ مدل کرد (مطابق شکل روبرو). بحث کنید در این وضعیت انرژی و ضعیت با چاه پتانسیل چه تغییری ایجاد می‌شود.

(*) ۹. مسأله Kronig-Penney یا مسأله اساسی حالت جامد!



حرکت یک الکترون در کریستال جامد را می‌توان به حرکت الکترون در یک پتانسیل پریودیک مطابق شکل روبرو تقلیل داد. باندهای انرژی مجاز برای چنین حرکتی را به دست آورید! برای ساده‌تر شدن مسأله را در حالت حدی $b \to 0$ $V_0 \to \infty$ به نحوی که bV_0 ثابت است. در حالتیکه $E < V_0$ حل کنید. (اگر $E > V_0$ جواب‌ها چگونه‌اند؟)

(راهنمایی: در یک ساختار پریودیک $V(x) = V(x+\lambda)$ با بخش‌های معادله شرودینگر را به صورت $V(x) = V(x+\lambda)\,e^{-i\lambda k}$ خواهید بود. (چرا؟). در حل مسأله شاید لازم شود بخشی از تابع به دست آمده با Matlab یا نرم‌افزاری رسم شود)