خواص تبدیل فوریه سیگنالهای زمان‌گسسته

(خواصی که کنار آنها علامت $*$ گذاشته شده، آنهایی هستند که با خواص تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته متفاوتند).

$*$ **خاصیت ۱)** پریودیک بودن: $X(\omega + 2\pi) = X(\omega)$

خاصیت ۲) خطی بودن: $ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$

خاصیت ۳) شیفت:

$$x[n - n_0] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega - \omega_0)$$

خاصیت ۴) مزدوج سیگنال: $x^*[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-\omega)$

نتایج این خاصیت (دقیقاً مشابه پیوسته):

- تقارن Conjugate-Symmetric تبدیل فوریه برای سیگنالهای حقیقی (شرط لازم و کافی است):

  $X(-\omega) = X^*(\omega) \quad \Longleftrightarrow \quad$ ($x[n]$ حقیقی)

- برای سیگنالهای حقیقی:
  - قسمت حقیقی تبدیل فوریه تقارن زوج دارد.
  - قسمت موهومی تبدیل فوریه تقارن فرد دارد.
  - دامنه تبدیل فوریه تقارن زوج دارد.
  - فاز تبدیل فوریه تقارن فرد دارد (بیان دقیقتر با توجه به عدم یکتایی فاز: فاز می‌تواند فرد انتخاب شود).
- تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی و زوج، حقیقی و زوج است.
- تبدیل فوریه یک سیگنال حقیقی و فرد، موهومی خالص و فرد است.
- برای یک سیگنال حقیقی (که در آن $x_e[n]$ و $x_o[n]$ قسمتهای زوج و فرد سیگنال هستند):

  $$x_e[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$$

  $$x_o[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$$

- حالت کلی فرمول بالا که هم برای سیگنالهای حقیقی و هم مختلط برقرار است ($x_{cs}[n]$ و $x_{cas}[n]$ قسمتهای Conjugate Symmetric و Conjugate Anti-Symmetric سیگنال هستند):

  $$x_{cs}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$$

  $$x_{cas}[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$$

$*$ **خاصیت ۵)** تفاضل (difference): $x[n] - x[n-1] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} (1 - e^{-j\omega})X(\omega)$

$*$ **خاصیت ۶)** مجموع (Running sum یا Accumulation):

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{X(\omega)}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$$

یا:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{X(\omega)}{1 - e^{-j\omega}} + \pi X(0)\delta(\omega), \qquad \text{for } -\pi < \omega \leq \pi$$

خاصیت ۷) معکوس‌شدن زمان: $x[-n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(-\omega)$

---

* **خاصیت ۸)** باز شدن زمان (بسته‌شدن زمان در حالت پیوسته، دوگانی در حالت گسسته ندارد): با تعریف

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{if } n/k \text{ is integer} \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

داریم: $x_{(k)}[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(k\omega)$

خاصیت ۹) مشتق در حوزه فرکانس: $-jn\, x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{d}{d\omega}X(\omega)$

---

* **خاصیت ۱۰)** رابطه پارسوال:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(\omega)\right|^2 d\omega$$

خاصیت ۱۱) کانولوشن در حوزه زمان: $x[n] * y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\omega)Y(\omega)$

---

* **خاصیت ۱۲)** ضرب در حوزه زمان (کانولوشن «پریودیک» در حوزه فرکانس):

$$x[n]\, y[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\omega-\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) \circledast X_2(\omega)$$

---

* **خاصیت ۱۳)** دوگانی: از آنجا که تبدیل فوریه یک سیگنال زمان‌گسسته، سیگنالی زمان‌پیوسته می‌شود، برخلاف تبدیل فوریه سیگنالهای زمان‌پیوسته، هیچ دوگانی‌ای بین یک سیگنال گسسته و تبدیل فوریه آن وجود ندارد. اما دو نوع دیگر دوگانی دیده می‌شود:

- دوگانی بین تبدیل فوریه سیگنالهای گسسته و ضرایب سری فوریه سیگنالهای پیوسته: اگر تبدیل فوریه سیگنال زمان‌گسسته $f[n]$ عبارت $g(\omega)$ شود، آنگاه $g(\cdot)$ تابعی پریودیک با پریود 2π خواهد بود. در نتیجه $g(t)$ سری فوریه دارد: ضرایب سری فوریه $g(t)$ عبارتند از $f[-k]$. بطور خلاصه:

  اگر $f[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} g(\omega)$ آنگاه $g(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} f[-k]$.

- دوگانی بین یک سیگنال گسسته پریودیک و ضرایب سری فوریه آن: اگر $f[n]$ سیگنالی پریودیک با پریود N بوده و ضرایب سری فوریه آن $g[k]$ باشد، آنگاه $g[\cdot]$ نیز با همان پریود N پریودیک خواهد بود، در نتیجه $g[n]$ هم بسط سری فوریه دارد: ضرایب سری فوریه $g[n]$ عبارتند از $\frac{1}{N}f[-k]$. بطور خلاصه:

  اگر $f[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} g[k]$ آنگاه $g[n] \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}f[-k]$.