خواص تبدیل Z

در خواص زیر فرض بر این است که تبدیل Z سیگنال $x[n]$ برابر است با $X(z)$ و ناحیه همگرایی آن R است.

خاصیت ۱) خطی بودن: $ax_1[n]+bx_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} aX_1(z)+bX_2(z)$ و $R_1 \cap R_2 \subseteq \mathrm{ROC}$

خاصیت ۲) شیفت زمانی: $x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0}X(z)$

و $\mathrm{ROC}=R$، بجز احتمالاً حذف یا اضافه‌شدن $z=0$ یا $z=\infty$ به ROC.

خاصیت ۳) scale شدن در حوزه Z (یا شیفت در حوزه فرکانس):

حالت کلی: $z_0^n\, x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\big(\frac{z}{z_0}\big)$ و $\mathrm{ROC}=|z_0|\,R$.

حالت خاص: $e^{j\omega_0 n}x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(e^{-j\omega_0}z)$ و $\mathrm{ROC}=R$.

خاصیت ۴) معکوس‌شدن زمان: $x[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\big(\frac{1}{z}\big)$ و $\mathrm{ROC}=\dfrac{1}{R}$.

خاصیت ۵) باز شدن زمان (بسته‌شدن زمان در حالت پیوسته، دوگانی در حالت گسسته ندارد): با تعریف

$$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k] & \text{if } n/k \text{ is integer}\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

داریم: $x_{(k)}[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X\big(z^k\big)$ و $\mathrm{ROC}=R^{\frac{1}{k}}$.

خاصیت ۶) مزدوج سیگنال: $x^*[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X^*(z^*)$ و $\mathrm{ROC}=R$.

نتیجه این خاصیت: شرط لازم و کافی برای حقیقی بودن سیگنال $x[n]$ آن است که $X(z)=X^*(z^*)$.

در نتیجه برای یک سیگنال حقیقی $x[n]$: الف) اگر $X(z)$ در $z=z_0$ صفر داشته باشد، در $z=z_0^*$ هم صفر خواهد داشت، و ب) اگر $X(z)$ در $z=p_0$ قطب داشته باشد، در $z=p_0^*$ هم قطب خواهد داشت (یعنی صفرها و قطبها به صورت مزدوج اتفاق می‌افتند).

خاصیت ۷) تفاضل (difference): $x[n]-x[n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} (1-z^{-1})X(z)$ و $R\cap\{|z|>0\}\subseteq \mathrm{ROC}$.

خاصیت ۸) مجموع (Accumulation):

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

و $R\cap\{|z|>1\}\subseteq \mathrm{ROC}$.

خاصیت ۹) کانولوشن: $x[n]*y[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)Y(z)$ و $R_1\cap R_2\subseteq \mathrm{ROC}$.

نتیجه فرعی: در ضرب دو چند جمله‌ای، ضریب هر جمله، کانولوشن ضرایب دو چندجمله‌ای است.

خاصیت ۱۰) مشتق در حوزه Z: $n\,x[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\dfrac{d}{dz}X(z)$ و $\mathrm{ROC}=R$.

خاصیت ۱۱) قضیه مقدار اولیه: اگر $x[n]=0, \forall n<0$، آنگاه:

$$x[0]=\lim_{z\to\infty} X(z)$$

به همین ترتیب نمونه‌های بیشتری از $x[n]$ را نیز می‌توان به دست آورد:

$$\begin{aligned}
x[1]&=\lim_{z\to\infty} z\big(X(z)-x[0]\big)\\
x[2]&=\lim_{z\to\infty} z^2\big(X(z)-x[0]-x[1]z^{-1}\big)\\
x[3]&=\lim_{z\to\infty} z^3\big(X(z)-x[0]-x[1]z^{-1}-x[2]z^{-2}\big)\\
x[4]&=\lim_{z\to\infty} z^4\big(X(z)-x[0]-x[1]z^{-1}-x[2]z^{-2}-x[3]z^{-3}\big)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

خاصیت ۱۲) قضیه مقدار نهایی: اگر $x[n]$ دست راستی باشد و $\lim_{n\to+\infty} x[n]$ هم وجود داشته باشد (یعنی اگر با بزرگ شدن n، مقدار $x[n]$ واگرا نشود و به سمت مقدار ثابتی همگرا شود)، آنگاه:

$$x[+\infty] = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

توجه: در حالت خاصی که $X(z)$ گویا باشد، شرط گفته شده برای برقراری رابطه فوق را می‌توان به این صورت هم بیان کرد که «ناحیه همگرایی $X(z)$ دست راستی باشد و همه قطبهای $(1 - z^{-1})X(z)$ درون دایره واحد باشند».