بسمه تعالی

سیگنالها و سیستم‌ها ، جلسه ۱۳ ، تاریخ : ۹۳/۱/۱۷

این جلسه : شروع مبحث تبدیل فوریه (فصل ۴)

قبل از عید دیدیم که یک سیگنال پریودیک $x(t)$ را می‌توان بصورت ترکیب خطی چندسینوسی بیان کرد ، به فرم زیر:

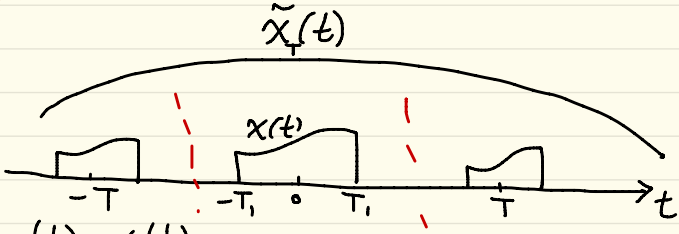
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

که در آن $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ است و در آنجا a_k از رابطه زیر بدست می‌آیند:

T: دوره تناوب سیگنال

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}$$

در این فصل خواهیم دید که یک سیگنال غیرپریودیک نیز بصورت ترکیب خطی چندسینوسی قابل بیان است.



$$\lim_{T\to\infty}\tilde{x}_T(t)=x(t)$$

$$\tilde{x}_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0\triangleq\frac{2\pi}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\underbrace{\tilde{x}(t)}_{x(t)}e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$\Rightarrow a_k=\frac{1}{T}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}_{?}$$

اکنون با تعریف

$$\boxed{X(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

داریم:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T} X(k\omega_0)$$

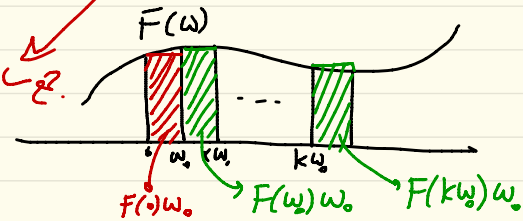
$$\Rightarrow \tilde{x}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\cdot\omega_0 \qquad \frac{1}{T} \to \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{T\to\infty} \tilde{x}_T(t)}_{x(t)} = \lim_{\omega_0\to 0} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\, \omega_0}_{?}$$

یادآوری: اگر $F(\omega)$ تابعی برحسب ω باشد، آنگاه:

$$\lim_{\omega_0\to 0} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(k\omega_0)\,\omega_0}_{\text{جمع ساعت مستطیلی}} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, d\omega$$



در این رابطه بالا را برای $F(\omega) = X(\omega)e^{j\omega t}$ استفاده می‌کنیم

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

خلاصه نهایی:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \longrightarrow \text{رابطه سنتز}$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \longrightarrow \text{رابطه آنالیز}$$

زوج‌های تبدیل فوریه

تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ گفته می‌شود

نحوه نمایش

$$\begin{cases} X(\omega)=\mathcal{F}\{x(t)\} \\ \text{یا} \\ x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \end{cases}$$

نکات:

① همانطور که در سری فوریه رابطه سنتز سیگنال را بصورت ترکیب خطی چند سینوسی بیان می‌کرد، در اینجا هم رابطه سنتز سیگنال را بصورت ترکیب خطی چند سینوسی بیان می‌کند با این تفاوت که در اینجا سینوسی‌هایی که با هم ترکیب می‌شوند رابطه هارمونیکی ندارند (مضارب یک فرکانس ثابت نیستند)، بلکه شامل همه فرکانس‌ها می‌شود و در نتیجه بجای سیگما، انتگرال داریم.

② $X(\omega)$ طیف (spectrum) سیگنال $x(t)$ هم گفته می‌شود.

③ مقدار فرکانس ω موجود در سیگنال:

$$\text{مقدار فرکانس } \omega = \frac{1}{2\pi} X(\omega)\, d\omega \Rightarrow X(\omega)=2\pi \times \frac{\text{مقدار فرکانس } \omega \text{ موجود}}{d\omega}$$

چگالی محتوای فرکانسی

$$\Rightarrow \underbrace{X(\omega)}_{\text{تبدیل فوریه}} = 2\pi \times (\text{چگالی محتوای فرکانسی})$$

نتیجه: مثلاً تبدیل فوریه سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ چه می‌شود؟

جواب: چون در فرکانس ω_0، جرم ۱ داریم، پس چگالی جرم برابر $\delta(\omega-\omega_0)$ می‌شود، پس:

$$X(\omega)=2\pi\,(\underbrace{\text{چگالی}}_{\delta(\omega-\omega_0)}) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$$

۵) رابطه $a_k=\frac{1}{T}X(k\omega_0)$ می‌گوید که ضرایب سری فوریه یک موج پریودیک، نمونه‌های تبدیل فوریه یک پریود از سیگنال هستند.

همگرایی تبدیل فوریه:

فرض کنید عبارت $\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ ، که در آن $X(\omega)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

سؤال: آیا لزوماً $\hat{x}(t)=x(t)$ می‌شود؟

جواب:

الف) تساوی به مفهوم $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{x}(t)-x(t)|^2dt=0$:

یک شرط برقراری رابطه بالا انرژی محدود بودن سیگنال $x(t)$ است، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt<+\infty$$

ب) همگرایی به مفهوم تساوی دقیق ریاضی. به عبارت دیگر تساوی به مفهوم $\hat{x}(t)=\frac{x(t^+)+x(t^-)}{2}$

یک شرط برقراری تساوی بالا شرایط دیریکله است، یعنی:

۱) سیگنال مطلقاً انتگرال‌پذیر: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<+\infty$

۲) در هر ناحیه محدود، تعداد max و min محدود داشته باشد

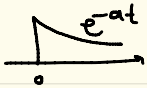
۳) " " " " " ناپیوستگی محدود داشته باشد.

فقط در این حالت است که تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس می‌شود.

مثال ۱: سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ تبدیل فوریه‌ای برای $2\pi\delta(\omega-\omega_0)$ دارد، ولی تبدیل لاپلاس اصلاً ندارد.

مثال ۲: سیگنال $x(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\pi t}$ خواهیم دید تبدیل فوریه دارد، ولی تبدیل لاپلاس ندارد.

چند مثال ساده:



① تبدیل فوریه سیگنال $x(t)=e^{-at}u(t)$ با فرض $a>0$ ؟

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$=\frac{1}{a+j\omega}\left[-e^{-(a+j\omega)t}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{1}{a+j\omega}\left[1-\underbrace{e^{-(a+j\omega)\times(+\infty)}}_{0}\right]\Rightarrow\boxed{X(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}}$$

② مثال بالا برای $a<0$ ؟ در این حالت عبارت $+\infty$ می‌شود، یعنی انتگرال تبدیل فوریه واگرا می‌شود، یعنی تبدیل فوریه وجود ندارد.