بسمه تعالی

جلسه ۱۴ درس سیگنال
تاریخ: ۹۳/۱/۱۹

این جلسه:

- چند مثال ساده از تبدیل فوریه
- شروع خواص تبدیل فوریه

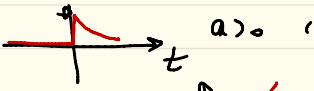
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt \quad \rightarrow \text{رابطه آنالیز}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega \quad \rightarrow \text{رابطه سنتز}$$

مقدار موجود از فرکانس ω $\rightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega)\,d\omega$

$\Rightarrow X(\omega)=2\pi x$ (چگالی همواری فرکانس)

مثال ۱: $x(t)=e^{-at}u(t)$



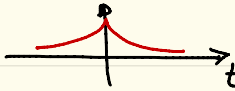
$a>0$ ،

$\Rightarrow X(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}$

مثال ۲: همان بالایی با $a<0$

← تبدیل فوریه ندارد.

مثال ۳: $x(t)=e^{-a|t|}$, $a>0$ ←



$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0}\cdots}_{\frac{1}{a-j\omega}}+\underbrace{\int_{0}^{+\infty}\cdots}_{\frac{1}{a+j\omega}}=\boxed{\frac{2a}{a^2+\omega^2}}$$

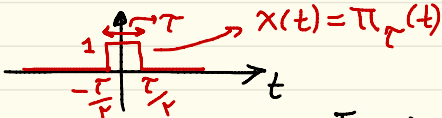
مثال ۴: $x(t)=\delta(t)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-j\omega t}dt=1 \longrightarrow \boxed{X(\omega)=1 \quad \forall \omega}$$

خاصیت نمونه‌برداری ← $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$

مثال ۵: یک پالس تکی با عرض τ

یادآوری $\text{Sinc}\,x=\frac{\sin\pi x}{\pi x}$



$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}e^{-j\omega t}dt=\frac{-1}{j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{1}{j\omega}\left[e^{j\frac{\omega\tau}{2}}-e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}\right]$$

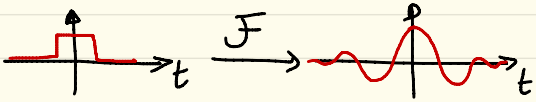
$$=\frac{1}{j\omega}\times\left[2j\sin\frac{\omega\tau}{2}\right]=\frac{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}=\underbrace{\frac{\sin\pi\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)}{\pi\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)}}_{\text{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)}\cdot\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{X(\omega)=\tau\,\text{Sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)=\tau\,\text{Sinc}(f\tau)}$$

$\omega=2\pi f$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt \longrightarrow \text{رابطه آنالیز برحسب } f$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df \longrightarrow \text{رابطه سنتز برحسب } f$$



مثال ۲ : تبدیل فوریه سیگنال پالس شده است. خود سیگنال چیست؟

$\Rightarrow x(t)=?$ $\xrightarrow{\text{پس از محاسبه}}$ $x(t)=\frac{W}{2\pi}\,Sinc\left(\frac{Wt}{2\pi}\right)$

سینک $\xrightarrow{F}$ پالس
پالس $\xrightarrow{F}$ سینک

مثالی از خاصیت دوگانی که بعداً خواهیم دید

خواص تبدیل فوریه :

$x(t)\xrightarrow{F} X(w)$

یا

$X(w)=F\{x(t)\}$

خاصیت ۱ : خطی بودن:

$$\left.\begin{matrix} x(t)\xrightarrow{F} X(w) \\ y(t)\xrightarrow{F} Y(w) \end{matrix}\right\} \Rightarrow ax(t)+by(t)\xrightarrow{F} aX(w)+bY(w)$$

اثبات : از تعریف تبدیل فوریه (رابطه آنالیز) در حد بدیهی

خاصیت ۲: شیفت زمانی

$$x(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

← یعنی شیفت زمانی دامنه تبدیل فوریه را عوض نمی‌کند و فقط فاز را عوض می‌کند.

اثبات: هم از سنتز هم از آنالیز راحت. مثلاً از سنتز:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\underbrace{e^{j\omega(t-t_0)}}_{e^{j\omega t}e^{-j\omega t_0}}d\omega$$

$$\Rightarrow x(t-t_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\left[X(\omega)e^{-j\omega t_0}\right]}_{F\{x(t-t_0)\}}e^{j\omega t}d\omega$$

مثلاً: $\delta(t-t_0) \xrightarrow{F} e^{-j\omega t_0}$

خاصیت ۳: conjugation:

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$

برخی نتایج این خاصیت:

(الف) شرط لازم و کافی حقیقی بودن سیگنال $x(t)$ آن است که:

$$x(t) \text{ real} \iff X(-\omega)=X^*(\omega) \quad (*)$$

← مثال: $e^{-at}u(t) \to \frac{1}{a+j\omega}$

برخی نتایج فرمول (*):

$$X(\omega)=\mathrm{Re}\{X(\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(-\omega)=\mathrm{Re}\{X(-\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{X(-\omega)\} \\ X^*(\omega)=\mathrm{Re}\{X(\omega)\}-j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\} \end{cases}$$

برای سیگنال حقیقی:

- جزء حقیقی تبدیل فوریه زوج است: $\mathrm{Re}\{X(-\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(\omega)\}$
- " موهومی " " فرد : $\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}=-\mathrm{Im}\,X(\omega)$
- دامنه تبدیل فوریه زوج است: $|X(-\omega)|=|X(\omega)|$
- فاز تبدیل فوریه فرد است: $\angle X(-\omega)=-\angle X(\omega)$

می‌توانند فرد انتی‌قرینه باشند

خاصیت ۴: $x(-t) \leftrightarrow X(-\omega)$

برخی نتایج ادغام خواص ۳ و ۴:

(**)

برای یک سیگنال حقیقی:

$$x_e(t) \xleftrightarrow{F} Re\{X(\omega)\}$$
$$x_o(t) \xleftrightarrow{F} jIm\{X(\omega)\}$$

اثبات:

$$x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \xrightarrow{F} F\{x_e(t)\} = \frac{X(\omega)+\overbrace{X^*(\omega)}^{X^*(-\omega)}}{2} = Re\{X(\omega)\}$$

چند نتیجه دیگر:

① سیگنال حقیقی و زوج ← تبدیل فوریه حقیقی و زوج

② سیگنال حقیقی و فرد ← " " موهومی خالص و فرد

مثال: $e^{-a|t|} \rightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$ ، $\delta(t) \rightarrow 1$

توجه: رابطه (**) فقط برای سیگنال‌های حقیقی بود. می‌توان رابطه‌ی بالا را به حالت کلی بیان کرد.

$$x_{c.s.}(t) \xleftrightarrow{F} Re\{X(\omega)\}$$
$$x_{c.a.s.}(t) \xleftrightarrow{F} jIm\{X(\omega)\}$$

یادآوری:

$$x_{c.s.}(t) = \frac{x(t)+x^*(-t)}{2}$$
$$x_{c.a.s}(t) = \frac{x(t)-x^*(-t)}{2}$$

خاصیت ۵: مشتق

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

اثبات: هم از سنتز هم از آنالیز راحت. مثل از سنتز:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \xrightarrow[\text{نسبت به } t]{\text{از طرفین مشتق}} x'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,\frac{d}{dt}\{e^{j\omega t}\}\,d\omega$$

($\frac{d}{dt}\{e^{j\omega t}\} = j\omega e^{j\omega t}$)

$$\Rightarrow x'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[j\omega X(\omega)]\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

($j\omega X(\omega) \hookrightarrow F\{x'(t)\}$)

خاصیت ۶: $X(0)$ برابر است سطح زیر سیگنال $x(t)$:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt \xrightarrow{\omega=0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = X(0)$$

($X(0)$ ← تا حدی شبیه DC در سری فوریه)

توجه: DC واقعی یک سیگنال، متوسط سیگنال در کل زمان است، یعنی:

$$DC=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\,dt$$

بنابراین اگر برای سیگنالی $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$ مقدار کرانه‌دار باشد، DC واقعی صفر است.

و یا اگر سیگنالی پریودیک باشد، DC واقعی آن a_0 (ضریب صفرم سری فوریه) می‌شود.