بسمه تعالی

جلسه ۱۵ : تاریخ: سه‌شنبه ۹۳/۱/۲۶

ادامه خواص تبدیل فوریه:

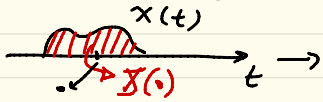
خاصیت شش:

$$x'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

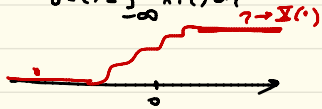
خاصیت ۷ : انتگرال در زمان

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

در اینجا هم این رابطه از تبدیل دوره به عنوان حالت خاصی تبدیل لاپلاس به دست می‌آید



$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$



DC واقعی سیگنال $y(t)$ ؟

$$DC = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\,dt = \frac{X(0)}{2}$$

$\Rightarrow$ در فرکانس $\omega=0$ محتوای فرکانسی به فرم جرم داریم $\longrightarrow \frac{X(0)}{2} =$ جرم

$Y(\omega) = 2\pi \times$ (چگالی محتوای فرکانسی)

که در فرکانس $\omega=0$ ضربه دارد $\leftarrow \frac{X(0)}{2}\delta(\omega)$

$\Rightarrow$ تبدیل فوریه در فرکانس صفر به فرم $2\pi \times \frac{X(0)}{2}\delta(\omega) = \pi X(0)\delta(\omega)$ است.

خاصیت ۸: Scaling

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

مثال: پخش یک صدا با دور تند $(a>1)$ ⇐ زیر شدن صدا (باز شدن در حوزه فرکانس ← افزایش مؤلفه‌های فرکانس بالا)
〃 〃 〃 کند $(a<1)$ ⇐ بم 〃

مثال: اصل عدم قطعیت در فیزیک ← سال ۱۹۲۷

نتیجه فرعی $a=-1$ ⇐ $x(-t) \to X(-\omega)$

خاصیت ۹: دوگانی (Duality)

یادآوری ← سینک → پالس
پالس → سینک

در حالت کلی:

اگر → $f(t) \xleftrightarrow{F} g(\omega)$
آنگاه → $g(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi f(-\omega)$

اثبات ساده: به عنوان تمرین برای خودتان اثبات کنید.

خاصیت ۱۰: مشتق در حوزه فرکانس

$$-jt\,x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

اثبات با تعریف ساده (هم از سمت هم از آنالیز)

تمرین (اجباری): با استفاده از خاصیت مشتق در زمان و خاصیت دوگانی، خاصیت مشتق در فرکانس را اثبات کنید.

خاصیت ۱۱: انتگرال در فرکانس

$$-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta)\,d\eta$$

x کوچک (زمان)

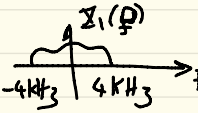
اینها هم از تعریف و هم از دوگانی قابل اثبات

خاصیت ۱۲: شیفت در فرکانس

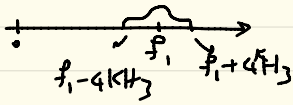
$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega-\omega_0)$$

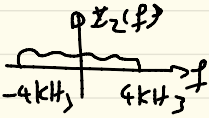
کاربرد: مدولاسیون سیگنال‌های مخابراتی

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \rightarrow X(\omega-\omega_0)$$

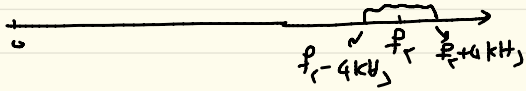


$\times\, e^{j2\pi f_1 t}$ در حوزه زمان $\longrightarrow$

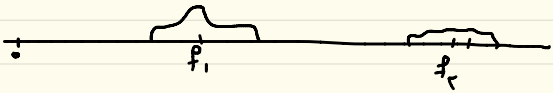




$\times\, e^{j2\pi f_2 t}$ $\longrightarrow$



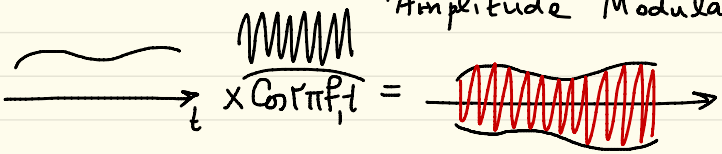
به کمک



مدولاسیون AM

Amplitude Modulation

- LW
- MW $\rightarrow 540^{kHz} - 1600^{kHz}$
- SW1
- SW2



خاصیت ۱۳ : رابطه پارسوال

$$E_\infty = \text{انرژی} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$\hookrightarrow |X(\omega)|^2 \longrightarrow$ energy-density spectrum

خاصیت ۱۴ : خاصیت کانولوشن

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega) X_2(\omega)$$

اثبات مفهومی :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} dt$$

$$\xrightarrow{e^{j\omega t}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$\longrightarrow \underbrace{H(\omega)}_{\text{پاسخ فرکانسی (گین در فرکانس } \omega)} e^{j\omega t}$$

اثبات با کانولوشن کمک و در آن اثبات بدست آوردیم

$$\hookrightarrow H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \Longrightarrow$$

با تعریف فعلی ما دیده می‌شود که

تبدیل فوریه پاسخ ضربه = پاسخ فرکانسی

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Longrightarrow y(t) = T\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \underbrace{T\{e^{j\omega t}\}}_{H(\omega) e^{j\omega t}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(\omega) H(\omega)}_{\text{باید همان تبدیل فوریه } y(t) \text{ باشد}} e^{j\omega t} d\omega$$

$\hookrightarrow Y(\omega) \longrightarrow \boxed{Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)}$

در زمان داشتیم : $y(t) = x(t) * h(t)$

خاصیت ۱۵: خاصیت ضرب (یا مدولاسیون)

$$x_1(t)x_2(t) \xleftarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

مثال:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{j\omega_0 t} \\ x_2(t) = x(t) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1(\omega) = 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \\ X_2(\omega) = X(\omega) \end{cases}$$

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) = X(\omega) * \delta(\omega-\omega_0) = X(\omega-\omega_0)$$