بسمه تعالی

جلسه ۱۷ درس سیگنالها و سیستم‌ها

تاریخ: سه‌شنبه ۹۳/۲/۲

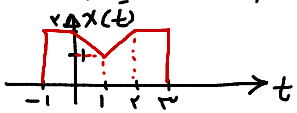
این جلسه: اتمام فصل ۴، شامل:

- حل چند مثال دیگر از تبدیل فوریه
- اثبات خاصیت انتگرال
- توصیف سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس
- سیستم‌های LTI توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت
- نکاتی در مورد سیستم‌های LTI
- اگر فرصت شد: پیاده‌سازی‌های غیرمستقیم سیستم‌های LTI

چند مثال دیگر از تبدیل فوریه

مثال ۱: (مسأله 4.25 کتاب)

$x(t)$ بصورت شکل زیر داده شده است. بدون محاسبه $X(\omega)$ به سؤالات زیر جواب دهید:



ⓐ $\measuredangle X(\omega)=?$

ⓑ $X(\omega)\big|_{\omega=0}$

ⓒ $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,d\omega$

ⓓ $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,\frac{\sin 2\omega}{\omega}\,e^{j2\omega}\,d\omega$

ⓔ $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$

ⓕ عکس تبدیل فوریه $Re\{X(\omega)\}$ را رسم کنید.

حل:

ⓐ با تعریف $y(t)$ بعنوان شیفت یافته $x(t)$ به اندازه یک واحد بسمت چپ، $y(t)$ زوج خواهد بود. $y(t)$ حقیقی و زوج $\Leftarrow$ $Y(\omega)$ حقیقی و زوج

از طرفی $x(t)=y(t-1) \Rightarrow X(\omega)=\underbrace{Y(\omega)}_{\text{حقیقی}\Leftarrow\text{زوج}}e^{-j\omega} \Rightarrow \boxed{\measuredangle X(\omega)=-\omega}$

ⓑ

$X(\omega)\big|_{\omega=0}=$ سطح زیر منحنی $=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\,dt=$ سطح زیر منحنی $=V$

ⓒ

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{t=0} \int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)\,d\omega=2\pi\overbrace{x(0)}^{2}=4\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(\omega)\underbrace{\frac{2\sin\omega}{\omega}}_{Y(\omega)}}_{Z(\omega)} e^{j2\omega}\, d\omega = ?$$

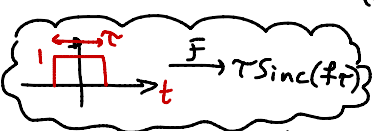
d

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\omega) e^{j2\omega}\, d\omega = 2\pi z(t)\Big|_{t=2} \rightsquigarrow 2\pi z(2)$$

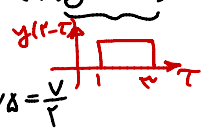
$$Z(\omega) = X(\omega)Y(\omega) \Rightarrow z(t) = x(t) * y(t)$$

$$Y(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} = 2\frac{\sin\pi\frac{\omega}{\pi}}{\pi\frac{\omega}{\pi}} = 2\,\mathrm{Sinc}\Big(\overset{2\pi f}{\frac{\omega}{\pi}}\Big) = 2\,\mathrm{Sinc}(2f) \longrightarrow$$

در حوزه زمان، پالس با دامنه ۱ و پهنای $T=2$



$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)\, d\tau \xrightarrow{t=2} z(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\underbrace{y(2-\tau)}\, d\tau$$



$$\Rightarrow \qquad z(2) = \int_{1}^{3} x(\tau)\, d\tau = 3/5 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \text{جواب نهایی مسأله} = 2\pi z(2) = \boxed{7\pi}$$

(e) $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$ ← پارسوال

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

(f) رسم تبدیل فوریه سکوس $Re\{X(\omega)\}$:

$$Re\{X(\omega)\} \xrightarrow[\text{حالت کلی}]{F^{-1}} x_{cs}(t) \overset{\text{صعبتر}}{=} x_e(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$$

مثال ۲:

$$X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega},\ a>0 \xrightarrow{F^{-1}} e^{-at}u(t)$$

مثال ۳: مطلوبست سه تبدیل سکوس فوریه $X(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$ با فرض $a<0$.

حل: اول برای یک مثال ساده $a=-2$ ←

$$X(\omega) = \frac{1}{-2+j\omega} = \frac{-1}{2-j\omega}$$

$$\underbrace{Y(\omega) = X(-\omega)} = \frac{-1}{2+j\omega} \Rightarrow y(t) = -1 \times e^{-2t}u(t) = -e^{-2t}u(t) \quad (1)$$

$$\hookrightarrow x(t) = y(-t) \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{x(t) = -e^{2t}u(-t)}$$

حالت کلی: با تعویض $b=-a$:

$$X(\omega) = \frac{1}{-b+j\omega} = \frac{-1}{b-j\omega}$$

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{Y(\omega) = X(-\omega)} = \frac{-1}{b+j\omega} \rightarrow y(t) = -e^{-bt}u(t) \\ \hookrightarrow x(t) = y(-t) \end{array}\right\} \Rightarrow x(t) = -e^{bt}u(-t)$$

$$\hookrightarrow \boxed{x(t) = -e^{-at}u(-t)}$$

$$\frac{1}{a+j\omega},\ a>0 \xrightarrow{F^{-1}} e^{-at}u(t)$$

$$\frac{1}{a+j\omega},\ a<0 \xrightarrow{F^{-1}} -e^{-at}u(-t)$$

مثال ۴: با استفاده از تبدیل فوریه و خاصیت کانولوشن، مطلوبست محاسبه کانولوشن دو سیگنال زیر

$$x(t)=e^{-bt}u(t),\ b>0 \qquad , \qquad h(t)=e^{-at}u(t),\ a>0$$

حل:

$$y(t)=x(t)*h(t) \Rightarrow Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{a+j\omega}\cdot\frac{1}{b+j\omega}$$

با تعریف $s=j\omega$:

$$\frac{1}{(s+a)(s+b)}=\frac{A}{s+a}+\frac{B}{s+b}=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right] \qquad A\to\frac{1}{b-a},\quad B\to\frac{1}{a-b}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{b-a}\left[\frac{1}{a+j\omega}-\frac{1}{b+j\omega}\right] \xrightarrow[b>0]{a>0} y(t)=\frac{1}{b-a}\left[e^{-at}u(t)-e^{-bt}u(t)\right]$$

$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)u(t)$$

اثبات خاصیت انگرال:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau \rightarrow \boxed{Y(\omega)=\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)} \quad (1)$$

مثال حالت خاص: تبدیل فوریه $u(t)$؟ همان فرمول بالا به ازای $\begin{cases}x(t)=\delta(t)\\ y(t)=u(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}X(\omega)=1\end{cases}$

$$\boxed{U(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)} \quad (2)$$

یادآوری: تبدیل فوریه فقط برای سیگنال‌های مطلقاً انتگرال‌پذیر ($\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<+\infty$) حالت خاص تبدیل لاپلاس می‌شود.

خواهیم دید که تبدیل لاپلاس $u(t)$، $\frac{1}{s}$ است پس در اینجا هم تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس نیست.

توجه: اگرچه ما (2) را به عنوان حالت خاص (1) وارد روی (1) بدست آوردیم، ولی در واقع می‌بینیم که این (1) است که از روی (2) اثبات می‌شود.

در اصل اثبات خاصیت انگرال:

مرحله اول: (2) را اثبات می‌کنیم.

مرحله دوم: (1) را از روی (2) بدست می‌آوریم.

اثبات مرحله دوم:

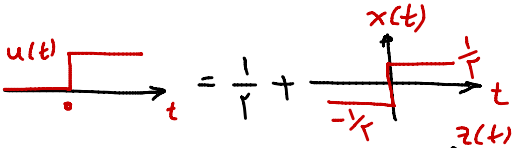
$$x(t)\rightarrow\boxed{\text{انتگرال‌گیر}}\rightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau=x(t)*u(t)$$

$$\hookrightarrow Y(\omega)=X(\omega)U(\omega)\overset{(2)}{=}\frac{X(\omega)}{j\omega}+\pi\underbrace{X(\omega)\delta(\omega)}_{X(0)\delta(\omega)}$$

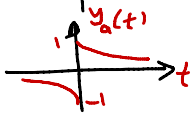
ادامه

مرحله اول: تبدیل فوریه پله؟



$z_a(t) = e^{-at}u(t), a>0 \rightarrow$

$y_a(t) = z_a(t) - z_a(-t) \rightarrow$



ایده: با $a \to 0$ سیگنال $y_a(t)$ (بجز یک ضریب $\frac{1}{2}$) همان سیگنال $x(t)$ می‌شود.

پس برای محاسبه $X(\omega)$، عبارت $Y_a(\omega)$ را محاسبه کرده، $a \to 0$ میل می‌دهیم.

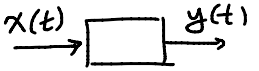
$$Z_a(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}, \quad Y_a(\omega) = Z_a(\omega) - Z_a(-\omega) = \frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} = \frac{-2j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0} Y_a(\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{-2j\omega}{\omega^2} = \frac{1}{j\omega}$$

$$u(t) = \frac{1}{2} + x(t) \Rightarrow U(\omega) = \frac{1}{2} \times 2\pi\delta(\omega) + X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

پایان اثبات

توصیف سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس



توصیف حوزه زمان $\rightarrow$ $y(t) = x(t) * h(t)$

توصیف حوزه فرکانس $\rightarrow$ $Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$

نکته مهم: توصیف حوزه فرکانس وقتی ممکن است که تبدیل فوریه‌ی وجود داشته باشد. بطور مشخص باید $H(\omega)$ وجود داشته باشد

شرط دیریکله برای وجود تبدیل فوریه

یک حالت خاص که خیالمان از وجود $H(\omega)$ راحت است، حالت $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < +\infty$

شرط لازم و کافی برای پایداری

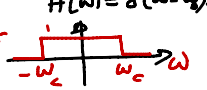
$\Leftarrow$ سیستم‌های پایدار حتماً در حوزه فرکانس قابل توصیف هستند.

(سیستم‌های ناپایدار ممکن است باشند، ممکن است نباشد. شرط اصلی وجود $H(\omega)$ است).

مثال‌هایی از سیستم‌های ناپایداری که می‌توان در حوزه فرکانس توصیف کرد:

$H(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$ ①

LPF



②

قضیه‌ای هست که می‌گوید اگر سیگنالی در شرایط دیریکله صدق کند، نه تنها تبدیل فوریه آن وجود دارد بلکه تابعی پیوسته برحسب ω است.