بسمه تعالی

جلسه ۱۸ درس سیگنالها و سیستم‌ها
تاریخ: یکشنبه ۹۳/۲/۷

این جلسه:

* تکمیل فصل ۴، شامل
  - توصیف سیستم‌های LTI در حوزه زمان
  - سیستم‌های LTI توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت
  - بسط به کسرهای جزئی
  - نکاتی در مورد توصیف سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس
  - پیاده‌سازی غیرمستقیم سیستم‌های LTI
  - اگر وقت شد: اثبات مستقیم خاصیت کانولوشن

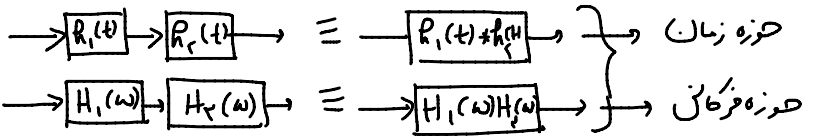
توصیف سیستم های LTI در حوزه فرکانس

$y(t) = x(t) * h(t) \rightarrow$ توصیف حوزه زمان

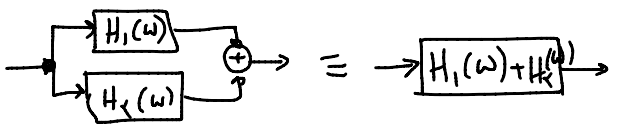
$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \rightarrow$ " " فرکانس

نتایج در اتصال سیستم ها

اتصال سری

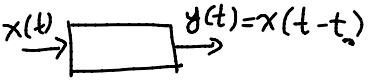


اتصال موازی



مثال از توصیف در حوزه فرکانس:

مثال ۱: سیستم تأخیر



- پاسخ ضربه $h(t) = \delta(t - t_0) \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه}} H(\omega) = e^{-j\omega t_0} \Rightarrow$ توصیف حوزه فرکانس: $Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
- از روی معادله فوق سیستم: $y(t) = x(t - t_0) \xrightarrow[\text{از تبدیل فوریه}]{\text{خاصیت شیفت}} Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$ سازگار

مثال ۲: سیستم مشتق گیر:

$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \xrightarrow[\text{از تبدیل فوریه}]{\text{خاصیت مشتق}} Y(\omega) = \underbrace{j\omega}_{H(\omega)} X(\omega) \Rightarrow \boxed{H(\omega) = j\omega}$

چون پاسخ ضربه این سیستم دوبلت است، پس بدست آوردیم

$\delta'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega$

سیستم‌های LTI توصیف‌شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

<u>تعیین پاسخ فرکانسی؟</u>

<u>روش اول</u> (روش فصل قبل). $x(t)=e^{j\omega t}$ و $y(t)=H(\omega)e^{j\omega t}$ را در معادله دیفرانسیل قرار می‌دادیم، $H(\omega)$ بدست می‌آمد.

<u>روش دوم</u>: از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم. بدست می‌آید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

<u>توجه</u>:

(سیستم LTI توصیف‌شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت) $\equiv$ (پاسخ فرکانسی گویا برحسب $j\omega$)

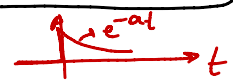
مثال ۱: مطلوبست محاسبه پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر:

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\,y(t) = x(t), \qquad a>0$$

حل: از طرفین تبدیل فوریه

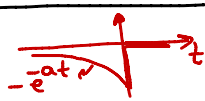
$$\Rightarrow (j\omega)Y(\omega) + aY(\omega) = X(\omega)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}_{H(\omega)} = \frac{1}{a+j\omega} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \xrightarrow[a>0]{\text{تبدیل فوریه معکوس}} \boxed{h(t) = e^{-at}u(t)} \rightarrow \text{علی}$$



مثال ۲: همان مثال قبل با فرض $a<0$

$$\text{تا اینجا مشترک} \rightarrow H(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \xrightarrow[a<0 \text{ (بد پس)}]{\text{تبدیل معکوس فوریه با فرض}} \boxed{h(t) = -e^{-at}u(-t)} \rightarrow \text{غیرعلی}$$



مثال ۳: پاسخ ضربه سیستم زیر:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

حل: از طرفین تبدیل فوریه

$$\Rightarrow \left[(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3\right]Y(\omega) = \left[(j\omega)+2\right]X(\omega)$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{(j\omega)+2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}$$

$$\frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$A \rightarrow \frac{-1+2}{-1+3} = \frac{1}{2}, \qquad B \rightarrow \frac{-3+2}{-3+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{1+j\omega} + \frac{\frac{1}{2}}{3+j\omega} \Rightarrow h(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-t} + e^{-3t}\right]u(t)$$

مثال ۴: مطلوبست محاسبه پاسخ سیستم مثال قبل به ورودی $x(t) = e^{-t}u(t)$

حل: $X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ ، $H(\omega)$ هم معلوم

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{(j\omega+2)}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)} = ?$$

یادآوری بسط به کسرهای جزئی:

$$G(s)=\frac{\overbrace{(\text{—})}^{F(s)}}{(s-s_0)^4(\text{—})}$$

با فرض اینکه درجه صورت از مخرج کمتر است.

اگر نباشد اول صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم تا یک چندجمله‌ای از آن بیرون بیاید و بعد باقیمانده / مخرج را طبق مطالب این صفحه بسط می‌دهیم.

$$G(s)=\frac{A_1}{s-s_0}+\frac{A_2}{(s-s_0)^2}+\frac{A_3}{(s-s_0)^3}+\frac{A_4}{(s-s_0)^4}+\underbrace{\text{بقیه جملات ناشی از بقیه ترمهای } F(s)}_{F_1(s)}$$

$$\Rightarrow \overbrace{(s-s_0)^4G(s)}^{F(s)\ \text{همان}}=A_1(s-s_0)^3+A_2(s-s_0)^2+A_3(s-s_0)+A_4+(s-s_0)^4F_1(s)$$

$$\xrightarrow{s=s_0\ \text{به ازای}}\boxed{A_4=F(s_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} F'(s)=3(s-s_0)^2A_1+2(s-s_0)A_2+A_3+(s-s_0)^3F_2(s)$$

$$\xrightarrow{s=s_0\ \text{به ازای}}\boxed{A_3=F'(s_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} F''(s)=6(s-s_0)A_1+2A_2+(s-s_0)^2F_3(s)\xrightarrow[s=s_0]{\text{به ازای}}\boxed{A_2=\frac{1}{2}F''(s_0)}$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}}\boxed{A_1=\frac{1}{6}F^{(3)}(s_0)}$$

خلاصه نهایی:

مثلاً در عبارتی به فرم:

$$G(s)=\frac{\overbrace{(\text{—})}^{F(s)}}{(s-s_0)^5(\text{—})}$$

$$G(s)=\frac{A_1}{s-s_0}+\frac{A_2}{(s-s_0)^2}+\frac{A_3}{(s-s_0)^3}+\frac{A_4}{(s-s_0)^4}+\frac{A_5}{(s-s_0)^5}+\text{جملات ناشی از بقیه تعبیر}$$

$$A_5=F(s_0)$$

$$A_4=F'(s_0)$$

$$A_3=\frac{1}{2!}F''(s_0)$$

$$A_2=\frac{1}{3!}F^{(3)}(s_0)$$

$$A_1=\frac{1}{4!}F^{(4)}(s_0)$$

ادامه حل مثال: بدست آوردیم.

$$Y(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}$$

$$\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}+\frac{B}{s+3}$$

$$B \rightarrow \frac{2-3}{(1-3)^2}=\frac{-1}{4}$$

$$A_2=\left.\frac{s+2}{s+3}\right|_{s=-1}=\frac{2-1}{3-1}=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s+3}\right)\right]_{s=-1}=\left.\frac{s+3-s-2}{(s+3)^2}\right|_{s=-1}=\left.\frac{1}{(s+3)^2}\right|_{s=-1}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2(j\omega+3)}=\frac{1/4}{j\omega+1}+\frac{\frac{1}{2}}{(j\omega+1)^2}+\frac{-1/4}{j\omega+3}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=\left[\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right]u(t)$$

با فرض $a>0$

$$\frac{1}{a+j\omega}\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}e^{-at}u(t)$$

$$\frac{1}{(a+j\omega)^2}\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}te^{-at}u(t)$$

$$\frac{1}{(a+j\omega)^n}\xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$$

چند نکته مهم در مورد توصیف سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس:

نکته اول: در رابطه $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ فرض ضمنی آن است که $H(\omega)$ وجود داشته باشد. یعنی فقط این نوع سیستم‌ها در حوزه فرکانس قابل توصیف هستند. مثال مهم: سیستم‌های پایدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|\,dt<+\infty \xRightarrow{\text{دیرکله}} \text{وجود دارد } H(\omega) \Longrightarrow \text{توصیف حوزه فرکانس ممکن است}$$

نکته دوم (مثالی از نکته اول):

سیستم توصیف شونده با معادله دیفرانسیل زیر:

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=x(t)$$

در روش فصل قبل برای محاسبه پاسخ ضربه (حل مستقیم معادله دیفرانسیل با فرض initial rest) دیدیم که مستقل از علامت a، پاسخ ضربه $h(t)=e^{-at}u(t)$ بدست می‌آید.

ولی در روش حل این فصل (استفاده از تبدیل فوریه) دیدیم که برای $a>0$ پاسخ ضربه $h_1(t)=e^{-at}u(t)$ بدست می‌آید ولی برای $a<0$ پاسخ ضربه $h_2(t)=-e^{-at}u(-t)$ بدست می‌آید.

در واقع خواهیم دید که معادله دیفرانسیل بالا ۲ سیستم LTI را می‌توانند توصیف کنند: (مستقل از علامت a)

سیستم ۱: $h_1(t)=e^{-at}u(t)$

سیستم ۲: $h_2(t)=-e^{-at}u(-t)$

دقت می‌کنیم:

$a>0$:
- سیستم ۱ هم علی است هم پایدار
- سیستم ۲ نه علی است نه پایدار

$a<0$:
- سیستم ۱ علی هست پایدار نیست
- سیستم ۲ علی نیست، پایدار هست

روش حوزه زمان چون از initial rest استفاده می‌کند همواره سیستم علی را می‌دهد.

" " فرکانس همواره سیستم را پایدار را می‌دهد. (چون از وجود داشتن $H(\omega)$ استفاده می‌کند).