بسمه تعالی

سیگنال‌ها و سیستم‌ها : جلسه ۲۱

تاریخ : ۹۳/۲/۱۶

این جلسه :

- حل چند مثال از تبدیل فوریه گسسته
- شروع فصل ۹ (تبدیل لاپلاس)

حل چند مثال از تبدیل فوریه سیگنال گسسته

مثال ۱: حل مثال ۱ صفحه قبل برای حالت $\alpha=\beta$

$$\left.\begin{aligned} x[n] &= \alpha^n u[n], \quad |\alpha|<1 \\ h[n] &= \beta^n u[n], \quad |\beta|<1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

هدف: محاسبه $y[n]=x[n]*h[n]$

حل:

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}$$

صفحه قبل با فرض $\alpha\neq\beta$ بسط به کسرهای جزئی داریم.

با فرض $\beta=\alpha$:

$$\Rightarrow Y(\omega)=\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}=\frac{j}{\alpha}e^{j\omega}\underbrace{\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}\right)}_{\mathcal{F}^{-1}\{-jn\alpha^n u[n]\}=x[n]}$$

یادآوری خاصیت مشتق:

$$-jn\,x[n]\xleftrightarrow{\mathcal{F}}\frac{d}{d\omega}X(\omega)$$

خاصیت شیفت:

$$x[n-n_0]\longleftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(\omega)$$

$$Y(\omega)=\frac{j}{\alpha}e^{j\omega}X(\omega)$$

$$\Leftrightarrow y[n]=\frac{j}{\alpha}x[n+1]$$

$$=\frac{j}{\alpha}\cdot(-j)(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]$$

$$\Rightarrow y[n]=\frac{1}{\alpha}(n+1)\alpha^{n+1}u[n+1]=\alpha^n\underbrace{(n+1)u[n+1]}_{=(n+1)u[n]}$$

$$\Rightarrow \boxed{y[n]=(n+1)\alpha^n u[n]}$$

نتیجه فرعی: $\frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}\xrightarrow[|\alpha|<1]{\mathcal{F}^{-1}}(n+1)\alpha^n u[n]$

مثال ۲: دیدیم اگر $|\alpha|<1$ باشد، داریم: $\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \alpha^n u[n]$

حال با فرض $|\alpha|>1$، مطلوب است محاسبه تبدیل فوریه معکوس $\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$

حل: (حالت خاص $\alpha=2$):

$$X(\omega)=\frac{1}{1-2e^{-j\omega}}=\frac{1}{2e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}-1\right)}=\frac{-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

با تعریف $Y(\omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$ داریم: $y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$$X(\omega)=\frac{-\frac{1}{2}e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}=-\frac{1}{2}e^{j\omega}\underbrace{Y(-\omega)}_{Z(\omega)} \Rightarrow x[n]=-\frac{1}{2}z[n+1]$$

$$z[n]=y[-n]$$

$$\Rightarrow x[n]=-\frac{1}{2}y[-(n+1)]=-\frac{1}{2}y[-n-1]=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(n+1)}u[-n-1]$$

در حالت کلی: با تعریف $\beta=\frac{1}{\alpha}$ $(|\alpha|>1 \Rightarrow |\beta|<1)$

$$X(\omega)=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}e^{-j\omega}}=\frac{\beta}{\beta-e^{-j\omega}}=\frac{\beta e^{j\omega}}{\beta e^{j\omega}-1}=\frac{-\beta e^{j\omega}}{1-\beta e^{j\omega}}$$

$$Y(\omega)\triangleq\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}\xrightarrow{|\beta|<1} y[n]=\beta^n u[n]$$

$$Z(\omega)\triangleq Y(-\omega) \Rightarrow z[n]=y[-n]=\beta^{-n}u[-n]$$

$$X(\omega)=-\beta e^{j\omega}Z(\omega) \Rightarrow x[n]=-\beta z[n+1]=-\underbrace{\beta\cdot\beta^{-n-1}}_{\beta^{-n}=\alpha^n}u[-n-1]$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n]=-\alpha^n u[-n-1]}$$

مثال ۳: مطلوبست محاسبه پاسخ ضربه سیستم LTI توصیف شونده با معادله دیفرانسیل زیر:

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \quad , \quad |a|<1 \text{ با فرض}$$

حل: روش مفصل قبل (بدون تبدیل نورد): پاسخ به $x[n]=\delta[n]$ ✓

$$y[n]-ay[n-1]=\delta[n] \longrightarrow \text{initial rest} \rightarrow y[-1]=0$$

$$n=0 \xrightarrow{\text{از معادله}} y[0]-\underbrace{ay[-1]}_{0}=1 \Rightarrow y[0]=1$$

$$n>0 \xrightarrow{\text{از معادله}} y[n]-ay[n-1]=0 \Rightarrow y[n]=ay[n-1]$$

$$\rightarrow \begin{cases} y[1]=ay[0]=a \\ y[2]=ay[1]=a^2 \\ \vdots \\ y[n]=a^n \end{cases}$$

برای $n<0 \longrightarrow y[n]=0$ (initial rest)

در کل $\Longrightarrow y[n]=a^n u[n] \xrightarrow{y=h} h[n]=a^n u[n]$

توجه مهم: در این روش استفاده‌ای از فرض $|a|<1$ نشد.

روش دوم (حل با استفاده از تبدیل فوریه):

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \Rightarrow (1-ae^{-j\omega})Y(\omega)=X(\omega)$$

$$\Rightarrow H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \xrightarrow{|a|<1} \boxed{h[n]=a^n u[n]}$$

مثال ۴: مطلوبست حل مثال قبل در حالت $|a|>1$

حل: روش اول استفاده‌ای از $|a|<1$ نکرده بود ⇐ $h[n]=a^n u[n]$

روش دوم:

$$H(\omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} \xrightarrow{|a|>1} \boxed{h[n]=-a^n u[-n-1]}$$

توجه: چرا دو روش مختلف، دو جواب متفاوت داد؟

خواهیم دید که معادله انفرنس $y[n]-ay[n-1]=x[n]$ دو سیستم LTI را توصیف می‌کند:

سیستم ۱: $h_1[n]=a^n u[n]$

سیستم ۲: $h_2[n]=-a^n u[-n-1]$

توجه:

سیستم ۱:
- $|a|<1$: علی است و پایدار است
- $|a|>1$: علی است و پایدار نیست

سیستم ۲:
- $|a|<1$: علی نیست - پایدار نیست
- $|a|>1$: علی نیست - پایدار هست

مشاهده می‌شود که روش فصل قبل بدلیل استفاده از initial rest (که معادل علیت است) همواره جواب علی را می‌دهد (که همواره سیستم ۱ است)، روش تبدیل فوریه بدلیل استفاده از وجود $H(\omega)$ (پایداری) سیستم پایدار را می‌دهد.

توجه:

در حالت کلی: پایداری $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ وجود $H(\omega)$

حالت سیستم‌های LTI توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت: پایداری $\Leftrightarrow$ وجود $H(\omega)$

فصل ۹: تبدیل لاپلاس

1749 - 1827

قبلاً دیدیم که نمایی‌های $e^{j\omega t}$ توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند، یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow A e^{j\omega t}$$

← برای سیستم‌های LTI پیوسته، نه تنها $e^{j\omega t}$ توابع ویژه هستند، بلکه e^{st} (s یک عدد مختلط) هم تابع ویژه هستند. دلیل:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = e^{st}$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{\text{به } t \text{ بستگی ندارد.}}$$

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow A e^{st}$$

$$\underbrace{H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-st}\, dt}$$

درست است با تبدیل فوریه، این عبارت را به عنوان تبدیل لاپلاس $h(t)$ تعریف می‌کنیم

تعریف تبدیل لاپلاس: $\boxed{X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt}$ ← تبدیل لاپلاس دوطرفه

با تبدیل لاپلاس یکطرفه، که در درس مدار بود ($\int_{0^-}^{+\infty}$) فرق دارد.

توجه: s در حالت کلی یک عدد مختلط است ← $s=\sigma+j\omega$

حالت خاص $s=j\omega$ ←

$$X(s)\Big|_{s=j\omega}=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt=\underbrace{\text{تبدیل فوریه}}_{X(\omega)}$$

$$\Rightarrow \text{تبدیل فوریه}\,(X(\omega))=\text{تبدیل لاپلاس}\Big|_{s=j\omega}$$

توجه بسیار مهم: میدان شرایط همگرایی هم مطرح است، در حالت کلی تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس نیست.

توجه: در حالت $s=\sigma+j\omega$:

$$X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega}=X(\sigma+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x(t)e^{-\sigma t}\right]e^{-j\omega t}\,dt=\mathcal{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}$$

بیان ریاضی (دقیقتر: همگرایی یکنواخت)

توجه: در تبدیل فوریه، همگرایی کامل (دقت مطلق) فقط در حالت شرایط دیریکله وجود دارد. (یعنی حالت $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|dt<+\infty$). البته ما برای فوریه با استفاده از فرمها یا استفاده از همگرایی مجذور انرژی (به مفهوم انرژی اختلاف = ۰) برای سیگنال‌هایی مثل سینوسی یا LPF هم تبدیل فوریه تعریف کردیم. ولی اینکار در تبدیل لاپلاس انجام نمی‌شود. یعنی در رابطه:

$$X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega}=\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

تبدیل فوریه فقط وقتی وجود داشته فرض می‌شود که $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)e^{-\sigma t}|dt<+\infty$.

به بیان دیگر:

- در تبدیل فوریه، مطلقاً انتگرال‌پذیری $x(t)$ شرط کافی برای وجود $X(\omega)$ بود و شرط لازم نبود.
- در تبدیل لاپلاس، " " " $x(t)e^{-\sigma t}$ شرط لازم و کافی برای وجود $\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ است.

بیان دیگر:

تبدیل لاپلاس $X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega}=\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ فقط برای سیگنال‌های $x(t)e^{-\sigma t}$ مطلقاً انتگرال‌پذیر هست.

یا فقط برای سیگنال‌های مطلقاً انتگرال‌پذیر است که تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس است.

مثال ۱:

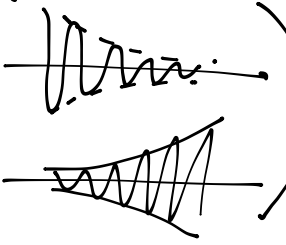
تبدیل لاپلاس $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ ؟ ←

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$\sigma>0$

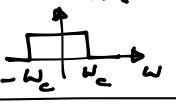
$\sigma<0$



هیچ کدام به دلیل انرژی بینهایت تبدیل فوریه ندارند.

پس سیگنال $x(t)=e^{j\omega_0 t}$ تبدیل لاپلاس ندارد (درحالیکه تبدیل فوریه دارد ⇐ برای آن تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس نیست).

مثال ۲: به طریق مشابه می‌توان دید که سیگنال $x(t)=\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$ تبدیل لاپلاس ندارد. ولی ما با استفاده از توابع غیرپیوسته تبدیل فوریه



را برای آن تعریف کرده بودیم.

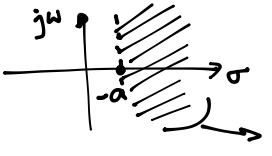
مثال از تبدیل لاپلاس: تبدیل لاپلاس $x(t)=e^{-at}u(t)$

حل:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(s+a)t}u(t)dt$$

$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt=-\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_{0}^{+\infty}$$

فقط زمانی همگرا (متناهی) است که $Re\{s+a\}>0$ یعنی $Re\{s\}>-Re\{a\}$



جواب نهایی: $X(s)=\frac{1}{s+a}$ ، $Re\{s\}>-Re\{a\}$

توجه: تبدیل لاپلاس $X(s)$ برای برخی مقادیر s می‌تواند همگرا باشد و برای برخی دیگر نباشد ←

$\underbrace{\text{ناحیه همگرایی}}$ = مجموعه s هایی که برای آنها تبدیل لاپلاس همگراست

$$\underbrace{\text{Region of Convergence}}_{\text{ROC}}$$