بسمه تعالی

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها : جلسه ۲۴

تاریخ : ۹۳/۲/۲۲

این جلسه : تکمیل فصل ۹، شامل :

- تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه
- توصیف سیستم‌های LTI در حوزه لاپلاس
- سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت
- انواع اتصال سیستم‌ها
- روش هندسی پاسخ فرکانسی از روی دیاگرام صفر و قطب
- تبدیل لاپلاس یکطرفه ← وقت نشد.

تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه:

تبدیل لاپلاس ←
$$\overset{\sigma+j\omega}{X(s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

تبدیل فوریه ←
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

← تبدیل لاپلاس روی محور $j\omega$ = $X(s)\Big|_{s=j\omega}$ = تبدیل فوریه

← اما بخاطر شرایط همگرایی در حالت کلی نمی‌توان گفت تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس است.

← در واقع برای تبدیل لاپلاس ← $X(s)\Big|_{s=\sigma+j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\, e^{-\sigma t}\}$ ← در اینجا $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)\, e^{-\sigma t}|\, dt < +\infty$

شرط لازم و کافی برای تبدیل لاپلاس بود. در حالیکه برای وجود تبدیل فوریه فقط شرط کافی بود، چون در تبدیل فوریه با استفاده از ضربه و توابع ناپیوسته تبدیل فوریه تعریف می‌کردیم، اینجا نمی‌کنیم.

نتیجه مهم: (حالت $\sigma=0$ در رابطه بالا)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty \iff \left(\text{محور } j\omega \text{ در درون ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس}\right)$$

رابطه (*)

البته توجه داریم که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \text{وجود تبدیل فوریه}$$

یعنی وجود تبدیل فوریه را سوال با اینکه محور $j\omega$ در درون ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس باشد نگیریم. در واقع اگر محور $j\omega$ در ROC باشد، تبدیل فوریه به مفهوم همگرایی یکنواخت داریم (یعنی $X(\omega)$ هیچ ضربه‌ای ندارد و تابع پیوسته‌ای برحسب ω است). ولی اگر محور $j\omega$ در درون ناحیه همگرایی نباشد، ممکن است به مفهوم انرژی صفر در اختلاف و با استفاده از ضربه یا توابع ناپیوسته به نوعی تبدیل فوریه تعریف کرده باشیم (که در این حالت دیگر تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس نمی‌شود، چون محور $j\omega$ اصلاً در ناحیه همگرایی لاپلاس نبوده)

چند مثال از اینکه تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل لاپلاس نیست:

مثال ۱: $x(t)=\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$

$X(s)$ وجود ندارد (ROC = تهی)

$X(\omega)=$

مثال ۲: $x(t)=\cos \omega_0 t$

$X(s)$ وجود ندارد ← ROC = تهی

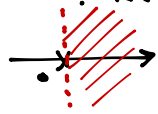
$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow X(\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$

$e^{-at}u(t) \to \frac{1}{s+a}, Re\{s\}>-Re\{a\}$ حالت خاص

$a=0$ به ازای

$\Rightarrow X(s)=\frac{1}{s}$, $ROC: Re\{s\}>0$

مثال ۳: $x(t)=u(t)$:



$\to j\omega \notin ROC$

تبدیل فوریه ← $X(\omega)=\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$ یعنی تبدیل فوریه حالت خاص لاپلاس نشد.

مثال ۴: $x(t)=(\cos \omega_0 t)u(t)$:

فوریه: $x(t)=\frac{1}{2}e^{+j\omega_0 t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t) \Rightarrow X(\omega)=\frac{1}{2}U(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}U(\omega+\omega_0)$

$\Rightarrow X(\omega)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)\right\}$

لاپلاس:

$x(t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t) \underset{a=-j\omega_0}{\overset{a=j\omega_0}{=}} \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0}=\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$,

$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, Re\{s\}>-Re\{a\}$

$ROC: Re\{s\}>0$

$\to j\omega \notin ROC$

بطور خلاصه: تبدیل فوریه برای تحلیل سیگنال‌ها معمولاً مناسب‌تر است و تبدیل لاپلاس برای تحلیل سیستم‌ها معمولاً مناسب‌تر.

مثلاً با تبدیل فوریه سؤالی از این دست که سیستم اگر چه پایدار است ولی چقدر به ناپایداری نزدیک است (و آیا در اثر تولرانس قطعات احتمال ناپایدار شدنش هست) را اصلاً نمی‌توانیم مطرح کنیم.

تحلیل سیستم‌های LTI در حوزه s :

توصیف حوزه زمان : $y(t)=x(t)*h(t)$ ①

" " فرکانسی : $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ ← با فرض وجود $H(\omega)$ ⇐ بهترین مناسب برای تحلیل سیستم‌های پایدار

" " s : $Y(s)=X(s)\underbrace{H(s)}_{\text{system function}}$ $\xrightarrow[\text{تا پلاس}]{\text{تبدیل}}$ ①

یا تابع تبدیل سیستم ← باید ROC آن هم داده شود تا سیستم معلوم باشد.

خواص سیستم‌های LTI از روی system function :

① علیت :

ROC راست‌راستی ⇒ علی

$\not\Leftarrow$

چون ROC راست‌راستی فقط می‌گوید $h(t)$ راست‌راستی ولی نمی‌گوید راست صفر.

اما: برای حالت خاص $H(s)$ گویا می‌توان گفت ROC راست‌راستی (راست راست راست‌ترین قطب) تضمین می‌کند علی بودن را :

$H(s)$ گویا : ROC راست‌راستی ⇔ علی ← رابطه (الف)

اما برای غیرگویا این خاصیت برقرار نیست (مثال 9.19 کتاب نگاه شود).

② پایداری :

(محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی) $\xleftrightarrow[(*)]{\text{رابطه}}$ $\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<+\infty$ ⇔ پایداری

بطور خلاصه: (محور $j\omega$ در ناحیه همگرایی) ⇔ پایداری ← رابطه (ب)

درستی گزاره زیر از روابط (الف) و (ب) نتیجه می‌شود:

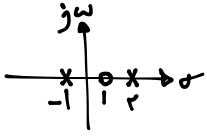
یک سیستم علی با تابع تبدیل گویا، پایدار است اگر و تنها اگر همه قطب‌های آن سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

توجه: سیستم می‌تواند قطب‌هایش سمت چپ محور jω نباشد ولی پایدار باشد (ولی انرژی علی نخواهد بود).

مثال: کلیه سیستم‌های LTI ای را پیدا کنید که سیستم فانکشن آنها به فرم زیر باشد:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

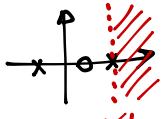
و علیت و پایداری آنها را مشخص کنید.



حل:

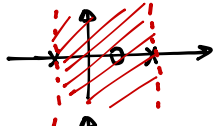
۳ تا ROC ممکن ⇐ ۳ سیستم ممکن:

سیستم ۱:



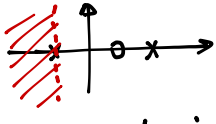
← علی (چون ROC سمت راستی)
ناپایدار (چون jω ∉ ROC)

سیستم ۲:



← غیرعلی، پایدار

سیستم ۳:



← غیرعلی، ناپایدار

یادآوری:

$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$ (ROC سمت راستی)

$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$ (ROC سمت چپی)

محاسبه پاسخ ضربه ۳ سیستم بالا:

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2}$$

سیستم ۱: $h_1(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$ ← علی - ناپایدار

سیستم ۲: $h_2(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$ ← غیرعلی - پایدار

سیستم ۳: $h_3(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$ ← غیرعلی - ناپایدار

سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت:

قبل به تبدیل فوریه:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

از طرفین تبدیل لاپلاس $\Longrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \rightarrow$$

$H(s)$ گویا

(سیستم با $H(s)$ گویا) $\equiv$ (سیستم توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت)

ولی ابزار تبدیل لاپلاس بسیار قوی است. با ابزارهای قبلی مثال زیر را نمی‌توانستیم حل کنیم.

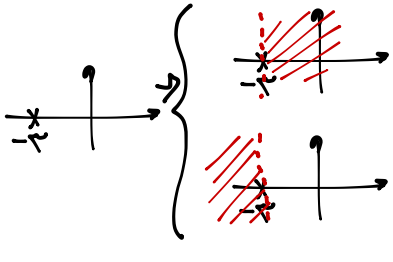
مثال: کلیه سیستم‌های LTI ای را پیدا کنید که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شوند:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

حل:

تبدیل لاپلاس $\Longrightarrow$ $sY(s) + 3Y(s) = X(s) \rightarrow H(s) = \frac{1}{s+3}$

باید ببینیم چند سیستم LTI هستند که $H(s)$ آنها عبارت بالا باشد:



$\rightarrow$ هم علی هم پایدار $\rightarrow h_1(t) = e^{-3t} u(t)$

$\rightarrow$ نه علی نه پایدار $\rightarrow h_2(t) = -e^{-3t} u(-t)$

مثال ۲: هر سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

حل:

تبدیل لاپلاس $\Rightarrow H(s) = \dfrac{s-1}{s^2-s-2} = \dfrac{s-1}{(s+1)(s-2)}$

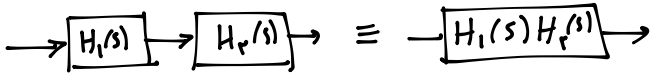
از اینجا بعدها ن مثال ۲ صفحه قبل

که روش حوزه زمان فقط سیستم را پیدا می‌کرد (که علی بود)

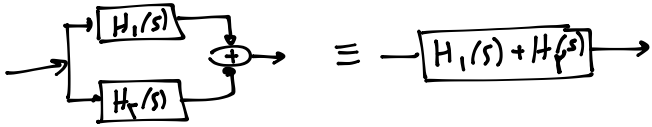
" " فرکانس " " ۲ " " (که پایدار بود).

اتصال سیستم‌ها:

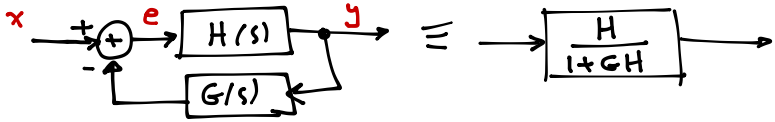
اتصال سری:



اتصال موازی



اتصال فیدبک:



$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s)[X(s) - G(s)Y(s)]$$

برای محاسبه آن

برحسب $Y(s)$ حل می‌کنیم:

$$Y = H(X - GY) \Rightarrow Y = HX - HGY$$

$$\Rightarrow Y + HGY = HX \Rightarrow (1+HG)Y = HX$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

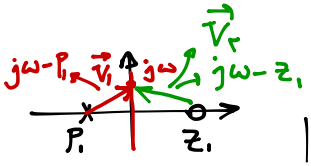
تابع تبدیل کلی

مثال‌های 9.28 تا 9.31 کتاب در این زمینه خوانده شود.

نحوه رسم پاسخ فرکانسی تقریبی از روی دیاگرام صفر و قطب به روش هندسی:

گویا $H(s) = \dfrac{\prod_{i=1}^{M}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)}$ صفرها ، قطبها

پاسخ فرکانسی $\rightarrow H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \dfrac{\prod_{i=1}^{M}(j\omega - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(j\omega - p_i)} \Rightarrow |H(\omega)| = \dfrac{\prod_{i=1}^{M}|j\omega - z_i|}{\prod |j\omega - p_i|}$

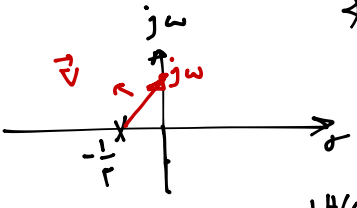


$\measuredangle H(\omega) = \sum \measuredangle(j\omega - z_i) - \sum \measuredangle(j\omega - p_i)$

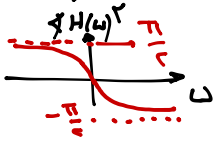
$|H(\omega)| = \dfrac{|\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1|}$

$\measuredangle H(\omega) = \measuredangle \vec{V}_2 - \measuredangle \vec{V}_1$

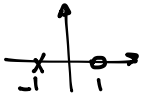
مثال: $H(s) = \dfrac{1}{s + \frac{1}{2}}$ ، حل



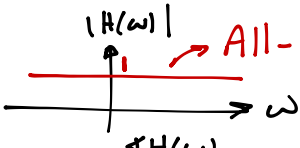
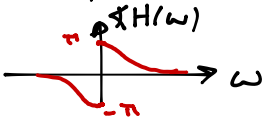
$\rightarrow$



مثال: $H(s) = \dfrac{s-1}{s+1}$



$\rightarrow$



All-pass