بسمه تعالی

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها : جلسه ۲۵

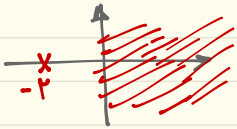
تاریخ: دوشنبه ۹۳/۲/۲۹

این جلسه :

- چند نکته از تبدیل لاپلاس + یک مثال
- شروع تبدیل Z

مثال‌های بخش 9.7.4 کتاب خوانده شود.

مثال: در مورد یک سیستم LTI اطلاعات زیر در دسترس است:



① سیستم علی و پایدار

② سیستم فانکشن گویا است.

③ یک قطب در $s=-2$ دارد (بقیه قطب‌ها را نمی‌دانیم)

④ در مبدأ صفر ندارد (بقیه صفرها را نمی‌دانیم).

برای هر کدام از عبارات زیر بگویید درست یا نادرست یا اطلاعات برای تعیین درستی یا نادرستی کافی نیست.

ⓐ $\mathcal{F}\{h(t)e^{3t}\}$ همگرا می‌شود.

حل: نادرست است. یادآوری:

$$X(s)\big|_{s=\sigma_0+j\omega}=X(\sigma_0+j\omega)=\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma_0 t}\}$$

به ازای $\sigma_0=-3$ طبق شکل با مسلماً $s=-3$ در ROC نیست، پس تبدیل فوریه بالا وجود ندارد.

ⓑ $\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,dt=0$

حل: نادرست است.

$$H(s)\big|_{s=0}=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,dt$$

یعنی عبارت بالا معادل $H(s)\big|_{s=0}=0$ است که غلط است (طبق فرض ③).

ⓒ کت-است، حل کرده، بعداً بیان می‌شود.

ⓓ $\frac{dh(t)}{dt}$ حداقل یک قطب در تبدیل لاپلاسش دارد.

حل: درست است.

$$\frac{dh(t)}{dt}\xleftrightarrow{\mathcal{L}}sH(s)$$

قطب موجود در $s=-2$ با ضرب در s حذف نمی‌شود. یعنی $sH(s)$ حداقل یک قطب در $s=-2$ دارد.

ⓔ $h(t)$ در $t=0$ محدود دارد. حل: نادرست است، وگرنه ROC کل صفحه می‌شد. در حالیکه مسلماً $s=-2$ در ROC نیست.

(f) $H(s) = H(-s)$

حل: نادرست است. چون اگر درست بود باید یک قطب هم در $s=2$ می‌داشتیم. درحالیکه برای یک سیستم علی و پایدار همه قطب‌ها باید سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

(g) $\lim_{s\to\infty} H(s) = 2$

حل: اطلاعات کفایت نمی‌کند. در واقع با اطلاعات صورت مسأله نمی‌توان حتی یقین کرد که آیا درجه صورت و مخرج مساوی هست یا نه.

دو نکته مهم در مورد تبدیل لاپلاس به صورت سؤال (فکر کنید، جواب در جلسات بعد):

نکته اول:

در مثال بالا قسمت (c) بیان می‌کند $th(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است. کتاب گفته که این حرف درست است و الان آن را اینطور بیان کرده که طبق خواص تبدیل لاپلاس داریم:

$$th(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{dH(s)}{ds} \quad , \quad ROC = R$$

در نتیجه گفته چون ROC تبدیل لاپلاس $h(t)$ و $th(t)$ یکسان است، پس چون محور $j\omega$ در ROC $h(t)$ هست، پس در ROC $th(t)$ هم هست، پس $th(t)$ هم علی و پایدار است.

استدلال فوق کاملاً غلط است. در واقع استدلال فوق را می‌توان در حالت کلی هم گفت و نتیجه گرفت که اگر $h(t)$ پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار باشد $th(t)$ هم حتماً علی و پایدار خواهد بود. درحالیکه چنین نیست. مثال نقض:

سیستم $h(t) = \frac{1}{t^2+1}u(t)$ را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که $h(t)$ علی و پایدار است، ولی $th(t)$ علی هست، پایدار نیست. چون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$$ $h(t)$ پایدار

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t\,h(t)|\, dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}\, dt = +\infty \longrightarrow$$ $t\,h(t)$ ناپایدار

سؤال ۱: اشکال استدلال کتاب کجاست؟

سؤال دوم: گفتیم محور $j\omega$ از ROC باشد، یعنی $h(t)$ پایدار است.

اکنون سیستم تشتق‌گیر را در نظر بگیرید ← $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

طبق تعریف پایداری سیستم ناپایدار است (چون یک پرش از $x(t)$، علیرغم محدود بودن، منجر به $y(t)$ نامحدود می‌شود).

ولی از طرفی تبدیل لاپلاس ←

$$h(t) = \delta'(t) \rightarrow H(s) = s\,\overbrace{\mathcal{L}\{\delta(t)\}}^{1}$$

و ROC کل صفحه است.

یعنی محور $j\omega$ در ROC هست، ولی $h(t)$ ناپایدار است. مشکل کجاست؟

تبدیل Z :

Lotfali Askar-Zadeh (Lotfi A. Zadeh)
Born: 1921
High School: Alborz (Tehran)
BS: University of Tehran (1942)
MS: MIT (1946)
PhD: Columbia University (1949)
Z-Transform paper: 1952, with Ragazzini

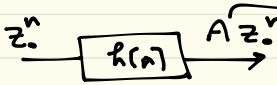
← دیدیم که $e^{j\omega n}$ توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند، یعنی:

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(\omega)e^{j\omega n}$$

که در آن $H(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$

بعداً ح بالا را تبدیل فوریه سیگنال $h[n]$ تعریف کردیم.

← بطریق مشابه می‌توان اثبات کرد که z_0^n هم توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند. یعنی:



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, \underbrace{x[n-k]}_{z_0^{n-k} = z_0^n z_0^{-k}}$$

$$\Rightarrow y[n] = z_0^n \underbrace{\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z_0^{-k} \right)}_{A}$$

خلاصه:

$$z_0^n \xrightarrow{LTI} H(z_0)\, z_0^n$$

که در آن:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n}$$

این عبارت را به عنوان تبدیل Z تعریف می‌کنیم.

تعریف: تبدیل Z سیگنال $x[n]$:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}}$$

توجه: برای $z = re^{j\omega}$

$$X(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[n] r^{-n}} e^{-j\omega n} = \mathcal{F}\{x[n] r^{-n}\}$$

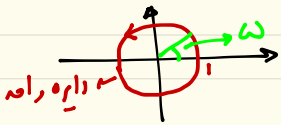
پس در اینجا هم ظاهراً تبدیل فوریه حالت خاص تبدیل Z است. ولی در واقع شرایط همگرایی فرق می‌کند.

در اینجا شرط لازم و کافی برای وجود $X(re^{j\omega})$ آن است که:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < +\infty$$

ROC = مجموعه z هایی که برای آنها $X(z)$ همگرا.

حالت خاص $r=1$: $X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ ←



مثال ۱: $x[n]=a^n u[n]$:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(az^{-1})^n=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

برقرار است:

$$|az^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>|a|$$

خلاصه:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC: |z|>|a| \qquad (*)$$

مثال ۲: $x[n]=-a^n u[-n-1]$:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}(az^{-1})^n \xlongequal[n\to -n]{\text{تغییر متغیر}} -\sum_{n=1}^{+\infty}(az^{-1})^{-n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{+\infty}(a^{-1}z)^n=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=-\frac{1}{az^{-1}-1}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

برقرار است:

$$|a^{-1}z|<1 \Rightarrow |z|<|a|$$

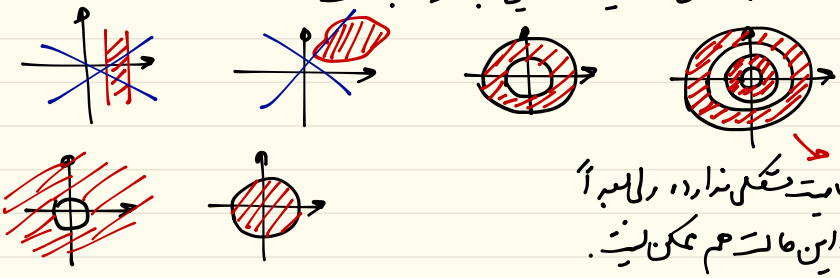
خلاصه نهایی:

$$-a^n u[-n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad ROC: |z|<|a| \qquad (**)$$

روابط (*) و (**) می‌گویند که عبارت جبری $X(z)$ به تنهایی سیگنال را مشخص نمی‌کند و باید ROC هم داده شده باشد. ← تا به تبدیل لاپلاس

خواص ناحیه همگرایی تبدیل Z :

خاصیت ۱: ROC شامل حلقه یا حلقه‌ای به مرکز مبدأ است. (بعداً می‌بینیم کدام)



از نظر این خاصیت مشکلی ندارد، ولی بعداً می‌بینیم که این حالت هم ممکن نیست.

اثبات: شرط وجود $X(re^{j\omega})$ آن بود که:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\, r^{-n} < +\infty$$

این شرط به ω بستگی ندارد.

خاصیت ۲: ROC هیچ قطبی ندارد. ← بدیهی

خاصیت ۳: اگر $x[n]$ دوره محدود داشته باشد، ROC کل صفحه است، بجز احتمالاً $z=0$ یا $z=\infty$

اثبات:

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

به ازای هر z غیر از 0 و ∞ وجود دارد.

حال $z=0$ و $z=\infty$ چطور؟ ←

$$X(z) = \dots + x[-2]z^{2} + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

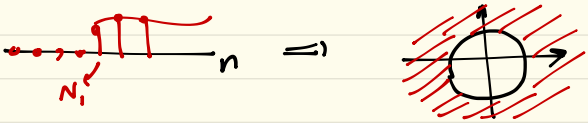
یعنی: روابط (الف)

$\{x[n]=0 \ \forall n>0\} \iff \{(z=0)\in ROC\}$ ← یعنی $x[n]$ ضدعلی

$\{x[n]=0 \ \forall n<0\} \iff \{(z=\infty)\in ROC\}$ ← یعنی $x[n]$ علی

← کلی است (نه فقط برای سیگنال‌های با دوره محدود).

خاصیت ۴: سیگنال دست راستی ⟸ ROC دست راستی (بجز احیاناً $z=\infty$).



دلیل: اگر $r_0 e^{j\omega_0}$ ناحیه همگرایی باشد $\forall r>r_0$: $re^{j\omega}$ ناحیه همگرایی است.

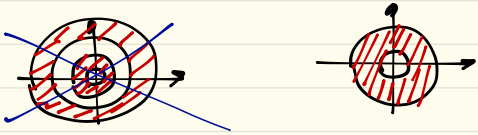
$$\sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \sum_{n=N_1}^{+\infty} |x[n]| r_0^{-n} < +\infty$$

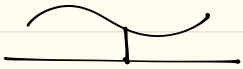
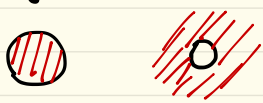
اثبات: برای $N_1 \geq 0$ ⟵ (برای $N_1 < 0$ مثبت).

توجه: طبق روابط (الف) در خاصیت بالا $z=+\infty$ هم در ROC هست به شرط اینکه سیگنال نه تنها دست راستی باشد بلکه دست راست صفر باشد.

خاصیت ۵: سیگنال دست چپی ⟸ ROC دست چپی (بجز احیاناً $z=0$).

خاصیت ۶: سیگنال دو طرفه ⟸ ROC یا تی یا یک حلقه





= دست راستی + دست چپی