بسمه تعالی

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها: جلسه ۲۶

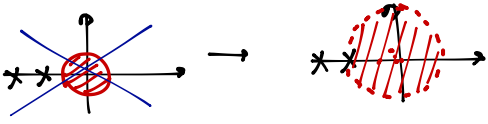
تاریخ: ۹۳/۲/۳۰

این جلسه:

ادامه بحث تبدیل Z

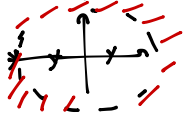
ادامه خواص ROC :

خاصیت ۷ : $X(z)$ گویا باشد، مرز ROC توسط قطب‌ها تعیین می‌شود.



خاصیت ۸ : برای $X(z)$ گویا :

$x[n]$ است راستی $\Rightarrow$ ROC سمت راست آخرین قطب $\rightarrow$ بجز احتمالاً $z=+\infty$



اما آیا $z=+\infty$ حتماً در ROC است!

$$X(z) = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots$$

اما :

$\underbrace{x[n] \text{ است راست‌گرد}}_{\text{علی } x[n]} \Rightarrow$ ROC بیرون دورترین قطب است و تا $z=+\infty$ گسترش می‌یابد ($z=+\infty \in ROC$)

برعکس آن هم برقرار است :

$\left.\begin{array}{l} \text{ROC دست راستی} \\ \text{و} \\ z=+\infty \in ROC \end{array}\right\} \Rightarrow$ علی $x[n]$

خاصیت ۹ :

$\left\{\begin{array}{l} \text{ROC دست چپی} \\ \text{و} \\ z=0 \in ROC \end{array}\right. \Longleftrightarrow$ $x[n]$ ضدعلی ($\forall n>0 \quad x[n]=0$ یعنی)

چند مثال:

مثال ۱: مطلوبست رسم دیاگرام صفر و قطب برای سیگنال زیر:

$$\leftarrow \quad x[n]=\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1 \\ 0 & o.w \end{cases} \quad , \quad a \text{ حقیقی و مثبت}$$

حل:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n$$

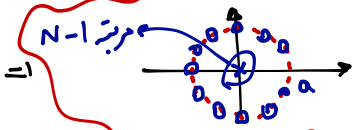
$$=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} \Rightarrow X(z)=\frac{1}{z^{N-1}}\,\frac{z^N-a^N}{z-a}$$

صفرها = ریشه‌های معادله به صورت $z^N=a^N$ را در حوزه اعداد مختلط حل کنیم.

$$z=re^{j\theta} \rightarrow r^N e^{jN\theta}=a^N \Rightarrow \begin{cases} r^N=a^N \Rightarrow r=a \\ N\theta=2k\pi \Rightarrow \theta=\frac{2k\pi}{N} \end{cases} , \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow \quad \text{صفرها} \rightarrow z_k=a e^{jk\frac{2\pi}{N}} , \quad k=0,\dots,N-1$$

→ کلاً N ریشه



صفر در $z=a$ با قطب $z=a$ حذف

جواب نهایی دیاگرام صفر و قطب

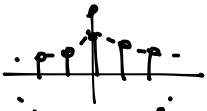
مثال ۲: تبدیل Z و ROC سیگنال $x[n]=b^{|n|}, b>0$

حل:

$$x[n]=\underbrace{b^n u[n]}_{\frac{1}{1-bz^{-1}}}+\underbrace{b^{-n}u[-n-1]}_{\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}}$$

$$\Leftarrow \quad |z|>b \qquad |z|<\frac{1}{b}$$

$0<b<1 \rightarrow$



$b>1 \rightarrow$

برای $0<b<1$: $\text{ROC}: b<|z|<\frac{1}{b}$

برای $b>1$: ROC ندارد ⇐ تبدیل Z نداریم.

مثال ۳: کلیه دنباله‌هایی را پیدا کنید که تبدیل Z آنها عبارت زیر باشد:

$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

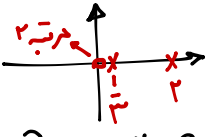
یادآوری:

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

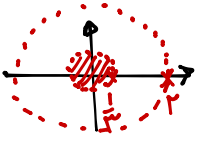
$$-a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|<|a|$$

حل:

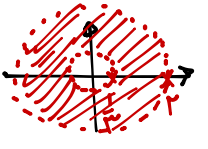
$$X(z)=\frac{z^2}{(3-\frac{1}{3})(z-2)}$$



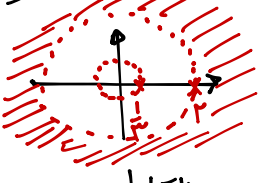
طبق خواص گفته شده، ۳ حالت بیشتر برای ROC ممکن نیست.



حالت سوم



حالت دوم



حالت اول

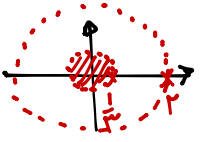
$$X(z)=\frac{1}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{A}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{B}{1-2z^{-1}}$$

$$A=\frac{1}{1-2z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=3}=\frac{1}{1-2\times 3}=\frac{1}{1-6}=-\frac{1}{5}$$

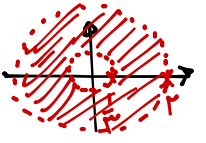
$$B=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5/6}=\frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z)=\frac{-1/5}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{6/5}{1-2z^{-1}}}$$

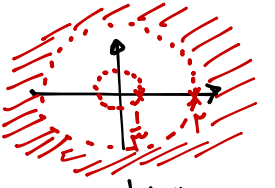
$$\rightarrow \boxed{X(z) = \frac{-\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}}$$



حالت سوم



حالت دوم



حالت اول

حالت اول:

$$x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}(2)^n u[n]$$

حالت دوم:

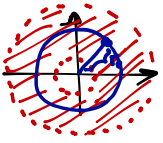
$$x[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{6}{5}(2)^n u[-n-1]$$

حالت سوم:

$$x[n] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1] - \frac{6}{5}(2)^n u[-n-1]$$

تبدیل معکوس Z :

$X(z)$ و ROC داده شده ← $x(n)=?$



$$X(z)\Big|_{z=r_0 e^{j\omega}} = X(\overset{\text{ثابت}}{r_0}\, e^{j\omega}) = \mathcal{F}\left\{x[n]\, r_0^{-n}\right\}$$

$$\Rightarrow x[n]\, r_0^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(r_0 e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{r_0^{n}}{2\pi}\int_{2\pi} X(r_0 e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

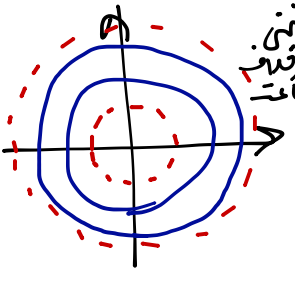
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(r_0 e^{j\omega})\,(r_0 e^{j\omega})^{n}\, d\omega$$

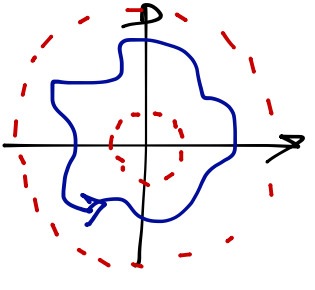
تغییر متغیر ← $z = r_0 e^{j\omega} \Leftarrow dz = \underbrace{j r_0 e^{j\omega}}_{z}\, d\omega \leftarrow d\omega = \frac{dz}{jz}$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\, z^{n}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)\, z^{n-1}\, dz} = \sum\left(\text{مانده های } X(z)z^{n-1} \text{ در قطبهای درون منحنی}\right)$$

انتگرال روی هر منحنی بسته که مبدأ را در خلاف جهت عقربه های ساعت دور بزند.





از نظر کاربردی رابطه فوق برای محاسبه تبدیل معکوس Z چندان مفید نیست ← روش‌های جایگزین

① بسط به کسرهای جزئی ← دقیقاً مشابه لاپلاس
② بسط سری تیلور (ماکلورن) ← دوگانی در لاپلاس ندارد.

بسط ماکلورن برای محاسبه تبدیل معکوس Z :

$$X(z) = \cdots + x[-2]z^{2} + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

یعنی $\overset{x \text{ در لحظه } n}{x[n]}$ همان ضریب z^{-n} در بسط ماکلورن $X(z)$ است.

مثال: مطلوبست محاسبه تبدیل معکوس Z متناظر زیر:

$$X(z) = \ln(1 + a z^{-1}), \quad |z| > |a|$$

حل: یادآوری: $|x|<1 \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}$

دارینی برای $x = a z^{-1}$ ← $|z|>|a| \Rightarrow |a z^{-1}| < 1$

$$\Rightarrow \ln(1 + a z^{-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}} z^{-n}$$

ضریب z^{-n} همان $x[n]$ است:

$$\Rightarrow x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n}, & n \geq 1 \\ 0, & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = \frac{(-1)^{n+1} a^n}{n} u[n-1]$$

دو مسأله زیر را به عنوان تمرین حل کنید:

- مثال بالا برای حالت ROC: $|z|<|a|$ با استفاده از بسط ماکلورن
- مثال بالا بدون استفاده از روش بسط ماکلورن