بسمه تعالی

درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها: جلسه ۲۷

تاریخ: ۹۳/۳/۴

این جلسه:

- تکمیل مباحث تبدیل Z

مثال از تبدیل معکوس با روش بسط ماکلورن: تبدیل Z معکوس عبارت $\frac{1}{1-az^{-1}}$

الف) $|z|>|a|$: بسط تیلور برحسب z^{-1} :

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = \underset{x[0]}{1} + \underset{x[1]}{az^{-1}} + \underset{x[2]}{a^2z^{-2}} + \cdots \Rightarrow x[n]=a^n u[n]$$

ب) $|z|<|a|$: بسط تیلور برحسب z :

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = \underset{x[-1]}{-a^{-1}z} - \underset{x[-2]}{a^{-2}z^2} - \cdots \Rightarrow x[n]=-a^n u[-n-1]$$

$$x(t-t_0) \rightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \rightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad s \leftarrow j\omega$$

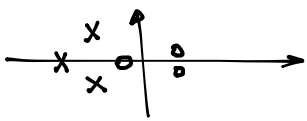
$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(\omega) \qquad z \leftarrow e^{j\omega}$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}X(z)$$

حالت خاص: تبدیل فوریه (تبدیل Z به ازای $z=e^{j\omega}$)

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$X(z) = \cdots + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots$$



$$(1-z^{-1})X(z) = \frac{z-1}{z}X(z)$$

خواص تبدیل Z :

← از روی برگه زیر اکسی (در سایت درس هم موجود است).

اثبات

خاصیت Accumulation:

$$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \longleftrightarrow \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

$$R \cap \{|z|>1\} \subseteq ROC$$

اثبات: یادآوری: داشتیم:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z|>|a|$$

حالت خاص $a=1$:

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} \quad , \quad ROC: |z|>1$$

حال داریم:

$$y[n] \triangleq \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \Rightarrow y[n] = \underbrace{x[n]}_{R_1=R} * \underbrace{u[n]}_{R_2=\{|z|>1\}}$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت کانولوشن}} Y(z) = X(z)U(z)$$

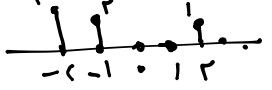
$$R_1 \cap R_2 \subseteq ROC$$

$P(z) = P_1(z)P_2(z)$: معلومیت‌ها

$$P_1(z) = 2z + 4 + z^{-1} + 2z^{-3}$$
$$P_2(z) = z^{-2} + 2z + 3z^{2}$$

$P_1 \rightarrow$

$P_2 \rightarrow$



کانولوشن اینها خروجی چندجمله‌ای $P(z)$ را می‌دهد

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

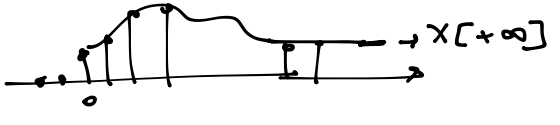
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{z \to +\infty} X(z) = x[0]}$$

$$X(z) - x[0] = x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

$$\Rightarrow z\left[X(z) - x[0]\right] = x[1] + x[2]z^{-1} + \cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{z \to +\infty} z\left[X(z) - x[0]\right] = x[1]}$$

در مورد قضیه مقدار اولیه برای سیگنال‌های علی



$$\Rightarrow x[+\infty] = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

قضیه مقدار نهایی (در حالت $X(z)$ گویا از روی المان‌ها که قسمی جزئی اجبات کنید).

تحلیل سیستم‌های LTI با تبدیل Z:

$$y[n]=x[n]*h[n] \Rightarrow Y(z)=X(z)\underbrace{H(z)}$$

یا system function

یا Transfer "

ارتباط خواص سیستم‌های LTI با سیستم ناکنش:

① علیت:

$$\text{علی} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{ROC بیرون یک دایره} \\ z=+\infty \in ROC \end{array} \right\}$$

$$H(z)=h[0]+h[1]z^{-1}+\dots$$

نتیجه: برای یک $H(z)$ گویا، سیستم علی است اگر و فقط اگر:

الف) ROC بیرون خارجی‌ترین قطب باشد.

ب) درجه مخرج $\geq$ درجه صورت

مثال: سیستمی با $H(z)=\dfrac{z^3+2z^2+z}{z^3+\frac{1}{4}z+\frac{1}{8}}$ مستقل از اینکه ROC چه باشد، نمی‌تواند نمایش یک سیستم علی و پایدار باشد.

② پایداری :

دایره واحد درون ناحیه همگرایی $\Longleftrightarrow$ پایدار

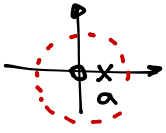
دلیل:

$$\text{پایداری} \Longleftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty \Longleftrightarrow (\text{دایره واحد درون ROC})$$

توجه: (دایره واحد درون ROC) معادل است با $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty\right)$. ولی این معادل وجود داشتن تبدیل فوریه نیستند. تبدیل فوریه ممکن است با خرب یا توابع نامیوست تعریف شود بدون اینکه سیگنال مطلقاً جمع پذیر باشد.

نتیجه: سیستم‌های LTI علی، شرط لازم و کافی برای پایداری آن است که تمام قطب‌ها درون دایره واحد بیفتند.

مثال: $h[n] = a^n u[n] \xrightarrow{\text{فوریه}} H(z) = \underbrace{\frac{1}{1-az^{-1}}}_{\frac{z}{z-a}}$



فقط برای $a<1$ پایدار

سیستم‌های توصیف شونده با معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

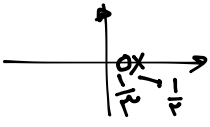
$$\xrightarrow{Z} Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-1} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

مثال: تمام سیستم‌های LTI ای را پیدا کنید که با معادله دیفرانسیل زیر توصیف می‌شوند:

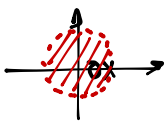
$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{3}x[n-1]$$

حل:

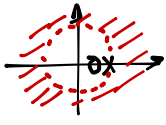
$$\Rightarrow H(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z-\frac{1}{3}}{z-\frac{1}{2}}$$



دو نوع ROC می‌توان داشت که هر کدام به همراه عبارت $H(z)$ یک سیستم را تعریف می‌کنند ⇐ دو سیستم



سیستم ۲: نه علی نه پایدار



سیستم ۱: هم علی هم پایدار

سیستم ۱:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\xrightarrow{|z|>\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\underbrace{\frac{1}{3}z^{-1}}_{\text{شیفت در زمان}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right)\Rightarrow \boxed{h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]}$$

سیستم ۲:

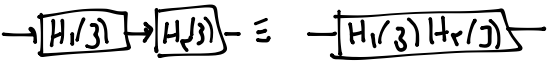
$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\xleftarrow{|z|<\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

$$(-//-)\Rightarrow \boxed{h[n]=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[-n]}$$

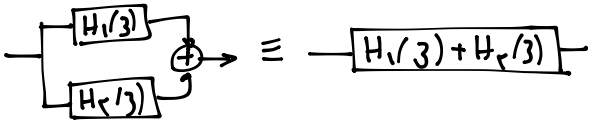
مثال‌های بخش 10.7.4 کتاب خوانده شوند.

اتصال سیستم‌ها:

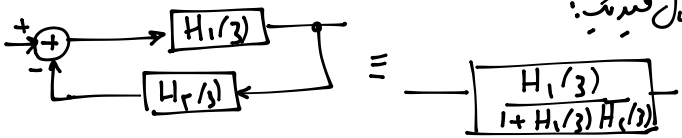
① اتصال سری



② اتصال موازی



③ اتصال فیدبک:



مثال‌های بخش 10.8.2 کتاب خوانده شوند.

تبدیل Z یکطرفه:

$$X(z) \triangleq x[0] + x[1]z^{-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- خاصیت شیفت: لیست:

$$x[n-1] \xleftrightarrow{Z} z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$x[n+1] \longleftrightarrow z^{-1}X(z) - z\,x[0]$$

کاربرد: حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه. ← مثال 10.37 کتاب خوانده شود.

مثال: نمایش عمومی یک دنباله فیبوناچی را بدست آورید:

$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

$x[0] = 1 \quad x[1] = 1$ ← شرایط اولیه

$x[n] = x[n-1] + x[n-2]$ ← معادله دیفرانسیل

$Z \hookrightarrow z^2 - z - 1 = 0 \rightarrow z_0, z_1 \rightarrow x[n] = A z_0^n + B z_1^n$

از شرایط اولیه