فصل اول

یادآوری مطالب پایه

در این فصل به مطالبی که در درس اصول مهندسی برق آموخته‌اید، و در این درس به دانستن آنها نیاز است بطور مختصر اشاره می‌شود.

۱-۱ سیگنال و سیستم

۱-۱-۱ سیگنال

به کمیات فیزیکی متغییر با زمان (و (یا) مکان)، در صورتیکه حاوی اطلاعات مفید باشند، سیگنال[1] گویند. در غیر اینصورت به آن نویز[2] گفته میشود، سیگنال و نویز هر دو حامل انرژی هستند. سیگنال‌ها می‌توانند پریودیک[3] باشند؛ مانند سیگنال سینوسی یا مربعی، ضربان قلب، ... یا غیرپریودیک باشند؛

---

[1] علامت, Signal

[2] همهمه، اغتشاش، نوفه, Noise

[3] متناوب, Periodical

مانند سیگنال‌های صوتی، تصویری، فشار یا دمای محیط و ... علاوه بر آن سیگنالها می‌توانند پیوسته[1] یا گسسته[2] در زمان یا دامنه باشند (سیگنالهای آنالوگ[3] یا دیجیتال[4])

ساده‌ترین سیگنال بصورت:

$$s(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\ , \qquad \omega = 2\pi f$$

تعریف میشود که در این رابطه A دامنه[5]، f فرکانس[6] و φ فاز[7] سیگنال نـام دارد. در ایـن درس عمدتاً با سیگنال‌های الکتریکی و آنالوگ سر و کار خواهیم داشت. بـرای بررسـی سـیگنال الکتریکـی، توان، ولتاژ، یا جریان آنرا در نظر می‌گیرند. بنابراین مثلاً:

$$v(t) = V_P\ \sin(\omega t + \varphi)$$

برای تبدیل سیگنال‌های غیر الکتریکی به الکتریکی یا بلعکس، مبدل‌ها[8] به کار گرفته میشوند. برای مثال یک سیگنال صوتی -که ماهیتاً یک سیگنال مکانیکی است- توسط میکـروفن، تبـدیل بـه سـیگنال الکتریکی شده، پس از تقویت -توسط تقویت کننده الکتریکی- مجدداً توسط بلندگو، تبدیل به سـیگنال صوتی میشود.

---

[1] Continuous
[2] Discrete
[3] Analog, تشابهی
[4] Digital, رقمی
[5] Amplitude, Magnitude
[6] Frequency, بسامد
[7] Phase
[8] Transducer, تراگردان

۱-۱-۲ سیستم

هرگاه اجزای یک مجموعه، در ارتباط با یکدیگر، از یک ورودی[1] مشخص، طبق یک دستورالعمل خاص، یک خروجی معین ایجاد کند؛ به آن مجموعه یک سیستم[2] گویند. برای مثال دانشگاه را می‌توان یک سیستم دانست؛ مدرسین، دستیاران آموزشی، تکنسین‌های آزمایشگاه‌ها، کارمندان اداری، ... ، کلاس‌ها، آزمایشگاه‌ها، وسایل کمک آموزشی، ... اجزای این مجموعه و برنامه و ضوابط آموزشی به مثابه دستورالعمل، دانش‌آموزانی که دبیرستان را با موفقیت پشت سر گذاشته و در کنکور سراسری امتیاز مورد نیاز را بدست آورده، یا در المپیادهای علمی موفق به کسب مدال شده‌اند، به عنوان ورودی و فارغ‌التحصیلان به عنوان خروجی سیستم محسوب می‌شوند. طبیعتاً هر سیستمی دارای تلفاتی نیز هست. دانشجویانی که قبل از فراغت از تحصیل -به هر علت- از لیست دانشجویان دانشگاه حذف شوند، جزو تلفات سیستم به حساب می‌آیند. یک فرستنده رادیویی را نیز می‌توان یک سیستم دانست، که ورودی آن صوت و خروجی آن امواج الکترومغناطیسی (رادیویی) میباشند. اجزای این مجموعه را میکروفن، تقویت کننده صوتی، نوسان‌ساز، ... و آنتن تشکیل می‌دهند. دستورالعمل هم می‌تواند فرکانس امواج، قدرت فرستندگی، نوع مدولاسیون، ... در نظر گرفته شود[3].

تذکر: گاهی اوقات به سیگنال ورودی، *تحریک*[4] و به سیگنال خروجی، *پاسخ*[5] اتلاق می‌شود.

---

[1] توجه شود که ورودی و خروجی خود نیز یک مجموعه هستند؛ که برای مفهوم تر بودن جمله، از ذکر "مجموعه" بعد از "ورودی و خروجی" خودداری شده است.

[2] سامانه، System

[3] ر.ک. به دروس مربوط به مخابرات

[4] Excitation

[5] Response

برای بررسی سیستم‌ها، آنها را -با توجه به مشخصات ذاتیشان- به چند گروه تقسیم می‌کنند. از جمله:

- **خطی یا غیر خطی:** سیستم‌هایی را که به توان به کمک معادلات دیفرانسیال درجه اول (خطی) توصیف نمود، *سیستم‌های خطی*[1] و در غیر این صورت *سیستم‌های غیر خطی*[2]، می‌نامند.
- **آنالوگ یا دیجیتال:** سیستم‌هایی که سیگنال‌های ورودی، خروجی و درونی آنها آنالوگ باشند، *سیستم‌های آنالوگ* نامیده می‌شوند. سیستم‌هایی که در آنها کلیه این سیگنال‌ها دیجیتال باشند، جزو *سیستم‌های دیجیتال* محسوب می‌شوند. اگر در یک سیستم، هم سیگنال‌های آنالوگ و هم سیگنال‌های دیجیتال فرآورده[3] شوند؛ به آن "*سیستم مختلط*[4]" گویند. برای مثال در یک مبدل آنالوگ به دیجیتال[5] ورودی یک سیگنال آنالوگ و خروجی یک سیگنال دیجیتال متناظر با آن خواهد بود. هم‌چنین در یک مبدل دیجیتال به آنالوگ[6] ورودی یک سیگنال دیجیتال و خروجی یک سیگنال آنالوگ متناظر با آن خواهد بود. در سیستم‌های صوتی امروزی، سیگنال‌های ورودی و خروجی سیگنال صوتی -بنابراین آنالوگ- و فرایندی که بر روی آن انجام می‌شود (مثلاً ضبط یا انتقال آن)، عموماً به صورت دیجیتال (مثلاً در قالب MP3) است. سیستم‌هایی که در این درس بررسی می‌شوند عمدتاً آنالوگ هستند.

---

[1] Linear Systems
[2] Nonlinear Systems
[3] Processed
[4] Mixed-Mode Systems
[5] ADC: Analog to Digital Converter
[6] DAC: Digital to Analog Converter

- **مستقل یا وابسته به زمان:** سیستم‌هایی که مشخصات (پارامترهای) اجزای آنها -در طول زمان بررسی- ثابت باشد، *سیستم‌های مستقل از زمان*[1] و در غیر اینصورت *سیستم‌های وابسته به زمان*[2] نامیده می‌شوند. سیستم‌هایی که در این درس بررسی می‌شوند مستقل از زمان هستند.

- **عِلّی یا غیر عِلّی:** سیستم‌هایی که برای آنها اصل عِلّیّت صادق است، یعنی معلول زاییده علت است، به عبارت دیگر اول سیستم تحریک می‌شود و سپس سیستم به این تحریک پاسخ می‌دهد، *سیستم‌های عِلّی*[3] نامیده می‌شوند؛ در غیر این صورت *غیر عِلّی*[4] هستند. سیستم‌های واقعی (طبیعی) همگی عِلّی هستند. سیستم غیر عِلّی فقط به صورت انتزاعی (ریاضی) وجود دارد (زمان منفی).

۱-۲ کمیات اصلی الکتریکی

- **انرژی:** توانایی انجام کار را انرژی نامند. واحد انرژی *ژول*[5] است. $1J = 1Nm$

- **توان:** نرخ زمانی تبدیل انرژی را توان گویند $p = \frac{dw}{dt}$. واحد توان *وات*[6] است. $1W = 1J/s$

- **بار الکتریکی:** خاصیت الکتریکی توسط بار الکتریکی (q) توصیف می‌شود. واحد بار الکتریکی *کولن*[7] است. یک کولن معادل بار $۶,۲۴ \times ۱۰^{۱۸}$ عدد الکترون است.

---

[1] Time Invariant Systems
[2] Time Variant Systems
[3] Causal Systems
[4] Non-Causal Systems
[5] J: Joule
[6] W: Watt
[7] C: Coulomb

- **جریان الکتریکی:** نرخ زمانی عبور بار الکتریکی از یک سطح است، $i = \frac{dq}{dt}$. واحد جریان الکتریکی *آمپر*[1] نامیده می‌شود. $1A = 1C/s$.

- **ولتاژ:** توانایی تبدیل انرژی به هنگام انتقال بار الکتریکی را ولتاژ یا اختلاف سطح الکتریکی گویند $v = \frac{dw}{dq}$. واحد ولتاژ *ولت*[2] است. $1V = 1J/C$. چنان‌که ولتاژ توانایی ایجاد حرکت در بار را داشته باشد، به آن *نیروی محرکه*[3] گویند و گاهی آنرا با حرف E نمایش میدهند. برای مثال یک باتری دارای نیروی محرکه (مثلاً ۱۲ ولت) است. این ولتاژ (در حالت ایده‌آل) مستقل از میزان عبور بار الکتریکی (جریان) است. یعنی حتی اگر جریانی هم از باتری نگذرد، باز هم ولتاژ همان مقدار است. چنان‌که ولتاژ بر اثر حرکت بار الکتریکی بوجود آید، به آن *افت ولتاژ*[4] یا *افت پتانسیل* گویند. طبیعتاً در این حالت ولتاژ تابعی از جریان خواهد بود حتی اگر جریان صفر شود، افت ولتاژ نیز صفر خواهد شد. مثلاً اگر سه عدد لامپ مشابه را بطور سری با هم و به باطری وصل کنیم، ولتاژ هر کدام برابر یک سوم ولتاژ باتری خواهد بود. ولتاژ باتری نیروی محرکه، و ولتاژ هر کدام از لامپ‌ها افت پتانسیل بر روی آن لامپ خواهد بود.

E → I → V

(علت۱) → (علت۲ ، معلول۱) → (معلول۲)

---

[1] A: Ampere
[2] V: Volt
[3] Electromotive Force
[4] Voltage Drop

۱-۳ مدل

برای بررسی علمی سیستم‌ها و اجزای آن معمولاً سعی میشود خاصیت عناصر و ارتباط بین خروجی و ورودی سیستم را بکمک روابط ریاضی توصیف نمود، به این عمل *مدلسازی*[1] گویند. تابع ریاضی که سیستم یا عنصر را توصیف می‌کند، *مدل*[2] نامیده می‌شود.

برای مثال یک تقویت کننده، که یک سیگنال ورودی ضعیف با توان P_i را به اندازه A_p برابر تقویت کرده و آنرا تبدیل به سیگنال خروجی با توان بیشتر P_o می نماید با رابطه:

$$P_o = A_P \times P_i$$

تعریف می‌شود. یا یک مقاومت الکتریکی با رابطه:

$$R = \frac{V}{I}$$

مدل می‌شود.

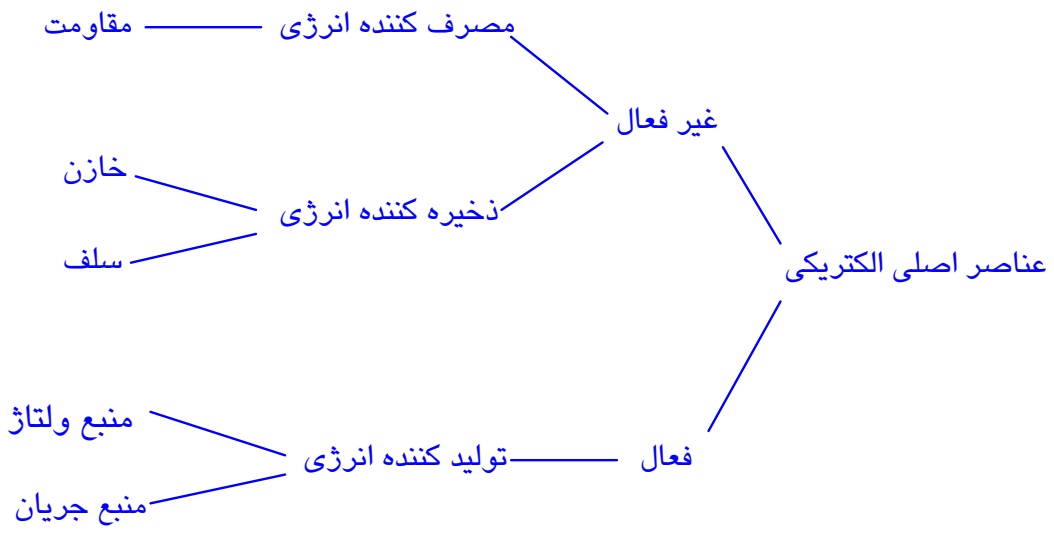
۱-٤ عناصر اصلی الکتریکی

یک سیستم الکتریکی، طبق تعریف از مجموعه‌ای از اجزای الکتریکی تشکیل شده است. به این اجزاء، *عناصر*[3] الکتریکی گویند. تنوع اجزای الکتریکی بسیار زیاد است. غالب این عناصر را نیز می توان بعنوان یک سیستم الکتریکی فرض نمود، که خود از اجزای کوچکتری تشکیل شده‌اند. در عمل می توان تمامی اجزای الکتریکی را بکمک مجموعه‌ای از فقط ۵ عنصر اصلی مدلسازی نمود. به این ۵

---

[1] Modeling
[2] Model
[3] اجزا، قطعات، المان‌ها، Components, Elements, Devices

جزء، که عبارتند از: *مقاومت*،[1] *خازن*،[2] *خودالقا*،[3] *منبع ولتاژ*[4] و *منبع جریان*[5]، عناصر اصلی مدارهای الکتریکی گویند. دسته بندی عناصر اصلی سیستمهای الکتریکی در شکل ۱-۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱-۱ عناصر اصلی سیستم‌های الکتریکی

هر کدام از این عناصر، می توانند *مستقل*[6] (غیر وابسته) یا *وابسته*[7] (غیر مستقل) و *خطی*[8] یا *غیرخطی*[9] باشند. عناصر غیر وابسته به صورت المان‌های *دو سری*[10] مدل می‌شوند، که مشخصه آنها همواره مقدار ثابتی است. عناصر وابسته به صورت المان‌های چهار سری[11] مدل می‌شوند، که مشخصه خروجی آنها تابعی از پارامترهای ورودی آنها است.

---

[1] Resistor
[2] Capacitor
[3] سلف، القاگر، بوبین، سیم‌پیچ، پیچک، Inductor
[4] Voltage Source
[5] Current source
[6] نا بسته، Independent
[7] Controlled, Dependent
[8] Linear
[9] Nonlinear
[10] یک دریچه‌ای، دو قطبی ، Two Pole, One Port
[11] دو دریچه‌ای، چهار قطبی، Four Pole, Two Port

۱-٤-۱ مقاومت

یک مقاومتِ الکتریکیِ ثابتِ ایده‌آل، یک دوقطبی است که مشخصه‌ی v-i آن از رابطه (۱-۱) بدست می آید.

$$v = R.i, \qquad R \equiv \frac{v}{i}, \qquad R = R_N = const \qquad (۱-۱)$$

در این رابطه v ولتاژ دو سر مقاومت، i جریان گذرنده از آن و R مقدار[1] مقاومت می‌باشد.

همانطور که در شکل ۱-۱ مشاهده می‌شود، مقاومت جزو المانهای پسیو[2] به حساب می‌آید و مصرف کننده است، یعنی انرژی الکتریکی را تبدیل به انرژی غیر الکتریکی (عمدتاً حرارت) می‌نماید. مقدار توان تبدیل شده، از رابطه (۱-۲) قابل محاسبه است.

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} R \cdot i^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} \frac{v^2(t)}{R}\,dt \qquad (۱-۲)$$

از این رابطه، برای جریان‌های DC:

$$P = R.I^2 = \frac{V^2}{R} \qquad (۱-۲ \text{ الف})$$

و برای جریان‌های سینوسی با دامنه V_P بعبارت دیگر I_P:

$$P = \frac{R.I_P^2}{2} = \frac{V_P^2}{2R} \qquad (۱-۲ \text{ ب})$$

محاسبه می‌شود.

---

[1] در فارسی هم به شیئی که خاصیت مقاومتی دارد (Resistor) و هم به خاصیت آن (Resistance)، "مقاومت" گفته می‌شود.

[2] غیرفعال، Passive

۱-٤-۲ خازن

خازن یک دو قطبی است که مشخصه v-i آن از رابطه (۱-۳) بدست می آید. برای یک خازن ایده‌آل $C = Const$ ظرفیت[1] خازن است.

$$v = \frac{1}{C}\int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt + V_1 \qquad i = C\frac{dv}{dt} \qquad (۱-۳)$$

خازن نیز جزو عناصر پسیو به حساب می‌آید ولی مصرف کننده انرژی نیست، بلکه انرژی را در میدان الکتریکی خود ذخیره می‌کند، یا انرژی ذخیره شده را به مدار بر می‌گرداند. میزان تغییرات انرژی خازن از رابطه (۱-٤) بدست می آید.

$$W_c = \int_{t1}^{t2} v_c . i_c . dt + W_0 \qquad (۱-٤)$$

برای جریانهای متناوبِ متقارن، انرژی ذخیره شده در یک نیم پریود، در نیم پریود بعد به مدار بر گردانیده میشود. بنابراین انرژی ذخیره شده در یک پریود کامل، صفر خواهد بود. برای جریانهای DC:

$$W_c = \frac{1}{2}CV^2 \qquad (۱-۵)$$

اگر از یک خازن، جریان سینوسی $i_c(t) = I_p \sin \omega t$ عبور کند، طبق رابطه (۱-۳) ولتاژ دو سر آن:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int I_p \sin \omega t . dt$$

بعبارت دیگر:

$$v_c(t) = \frac{I_p}{C\omega}.\cos \omega t = \frac{I_p}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

خواهد بود. با مقایسه با یک ولتاژ سینوسی $v_c = V_p \sin(\omega t + \varphi)$ نتیجه میشود:

---

[1] Capacitance

$$V_p = \frac{I_p}{C\omega} \ , \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad (۱-٦)$$

یعنی ولتاژ دو سر خازن نسبت به جریانِ گذرنده از آن ۹۰^{o} پس فاز[1] (اختلاف فاز منفی، تأخیر فاز) دارد. دامنه ولتاژ متناسب با دامنه جریان و متناسب با عکس ظرفیت خازن و فرکانس سیگنال است. در ضمن فرکانس جریان و ولتاژ یکسان است. از مقایسه دو رابطه (۱-۱) و (۱-٦)

$$V_c = \frac{1}{C\omega} \ . \ I_c, \qquad V_R = R \ . \ I_R$$

نتیجه می‌گیریم که خازن، برای ولتاژهای سینوسی، مانند یک مقاومت عمل می‌کند که مقدار آن وابسته به ظرفیت خازن و فرکانس ولتاژ است. ولی از آنجایی که بین ولتاژ و جریان اختلاف فاز وجود دارد و تلفاتی هم روی این مقاومت وجود ندارد، پس به آن یک مقاومت حقیقی نمی‌توان گفت؛ به همین دلیل به آن مقاومت ظاهری می‌گویند. البته چون هر نسبت ولتاژ به جریان یک مدار دو سر را، می توان مقاومت ظاهری نامید؛ در صورتی که فقط یک خازن داشته باشیم، به مقاومت ظاهری آن *راکتانس*[2] خازنی گویند و آنرا با X_C نمایش میدهند. لذا خازن برای فرکانس‌های کم ($\omega \to 0$) مانند مدار باز[3] ($X_C \to \infty$)، و برای فرکانسهای زیاد ($\omega \to \infty$) مانند اتصال کوتاه[4] ($X_C \to 0$) عمل می‌کند.

۱-٤-۳ خودالقا

سلف یک دو قطبی است که مشخصه v-i آن از رابطه (۱-۷) بدست می آید:

$$v = L\frac{di}{dt}, \qquad i = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt + I_1 \qquad (۱-۷)$$

---

[1] Lag
[2] Reactance
[3] O.C.: Open Circuit
[4] S.C.: Short Circuit

برای یک سلف ایده آل $L = const$. ظرفیت[1] سلف می‌باشد.

سلف نیز جزو عناصر پسیو به حساب می‌آید ولی مصرف کننده انرژی نیست، بلکه انرژی را در میدان مغناطیسی خود ذخیره میسازد، یا انرژی ذخیره شده را به مدار باز می‌گرداند. میزان تغییرات انرژی سلف از رابطه (۱–۸) بدست می‌آید:

$$W_L = \int_{t1}^{t2} v_L \,.\, i_L \, dt + W_o \qquad (۱–۸)$$

برای جریانهای متناوبِ متقارن، انرژی ذخیره شده در یک نیم پریود، در نیم پریود بعد به مدار برگردانیده میشود. لذا انرژی ذخیره شده در یک پریود کامل، صفر خواهد بود. برای جریانهای DC:

$$W_L = \frac{1}{2} \,.\, L \,.\, I_L^{\,2} \qquad (۱–۹)$$

سایر مطالبی که برای خازن (و مقاومت) گفته شد، برای سلف هم کمابیش صادق است منجمله برای جریان سینوسی:

$$V_p = L\omega \,.\, I_p, \qquad \varphi = +\frac{\pi}{2} \qquad (۱–۱۰)$$

یعنی ولتاژ دو سر سلف، نسبت به جریان گذرنده از آن ۹۰^{o} پیش فاز[2] (اختلاف فاز مثبت، تقدم فاز) دارد. دامنه ولتاژ متناسب با دامنه جریان، ظرفیت سلف و فرکانس سیگنال است. به $X_L = L\omega$ راکتانس سلف گفته میشود.

سلف برای فرکانس کم ($\omega \to 0$) مانند اتصال کوتاه ($X_L \to 0$) و برای فرکانسهای زیاد ($\omega \to \infty$) مانند مدار باز ($X_L \to \infty$) عمل می‌کند.

---

[1] اندوکتانس، خودالقایی، Inductance

[2] Lead

۱-٤-٤ منابع ولتاژ

یک *منبع ولتاژ*[1] ایده‌آل، یک دو قطبی است که اختلاف پتانسیل دو سر آن همواره مقدار ثابتی باشد

$$v = v_N = const. \qquad (۱۱-۱)$$

به منبع ولتاژی که مقدار لحظه‌ای آن ثابت است (در یک محدوده زمانی، ثابت است) *منبع ولتاژ مستقیم*[2] (DC) گویند؛ مانند یک باتری (مثلاً $V = 12V$).

به منبع ولتاژی که مقدار لحظه‌ای آن دایماً در حال تغییر است -مانند یک ولتاژ سینوسی- *منبع ولتاژ متناوب*[3] (AC) گویند (مثلاً ولتاژ برق شهر). توجه شود که برای مثال یک منبع ولتاژ سینوسی با رابطه:

$$v(t) = 10V \sin\left(\frac{10^4}{s}.t + \frac{\pi}{6}\right)$$

یک منبع ولتاژ ایده‌آل است، زیرا پارامترهای آن، یعنی: دامنه ($A = 10V = const.$)، فرکانس ($\omega = 10^4 \frac{rad}{s} = const.$) و فاز ($\varphi = \frac{\pi}{6} = const.$) همگی ثابت هستند.

منابع ولتاژ می‌توانند *وابسته*[4] باشند. در این صورت مدار معادل (مدل) آنها یک چهار قطبی است. مقدار ولتاژ (خروجی) میتواند تابعی از ولتاژ یا جریان ورودی باشد. ضریب تبدیل یک *منبع ولتاژ وابسته به ولتاژ*[5] را *بهره ولتاژ*[6] نامند و آنرا با A_V (و گاهی μ) نمایش میدهند. ولتاژ ورودی، v_I (و در نتیجه ولتاژ خروجی، v_O) می‌تواند مقداری ثابت (DC) یا متناوب (AC) باشد بنا به تعریف:

$$A_v \equiv \frac{\partial v_O}{\partial v_I} \qquad (۱۲-۱)$$

---

[1] Voltage Source
[2] DC: Direct Current
[3] AC: Alternating Current
[4] Controlled, Dependent
[5] VCVS: Voltage Controlled Voltage Source
[6] Voltage Gain

و کمیتی بدون واحد است. در یک VCVS ایده‌آل، جریان ورودی $i_I \equiv 0$ است. ضریب تبدیل یک *منبع ولتاژ وابسته به جریان*[1] را *مقاومت تقابلی*[2] یا *مقاومت انتقالی*[3] گویند و آنرا با R_m نمایش میدهند.

جریان ورودی، i_I (و در نتیجه ولتاژ خروجی، v_O) می‌تواند DC یا AC باشد. بنا به تعریف:

$$R_m \equiv \frac{\partial v_O}{\partial i_I} \qquad (۱۳-۱)$$

واحد R_m اهم[4] بعبارت دیگر $\frac{V}{A}$ است. در یک CCVS ایده‌آل: $v_I \equiv 0$

۱-٤-۵ منابع جریان

یک *منبع جریان*[5] ایده‌آل، یک دو قطبی است که جریان گذرنده از آن همواره مقداری ثابت است.

$$i = i_N = const. \qquad (۱٤-۱)$$

سایر مطالبی که برای منبع ولتاژ ذکر شد، برای منبع جریان نیز صادق است. ضریب تبدیل یک منبع جریان وابسته به ولتاژ[6] را هدایت تقابلی[7] یا هدایت انتقالی[8] گویند و آنرا با Gm نمایش میدهند. بنا به تعریف:

$$G_m \equiv \frac{\partial i_O}{\partial v_I} \qquad (۱۵-۱)$$

واحد Gm، زیمنس[9] بعبارت دیگر $\frac{A}{V}$ است. برای یک VCCS ایده‌آل: $i_I \equiv 0$.

---

[1] CCVS: Current Controlled Voltage Source
[2] Mutual Resistance
[3] Transresistance
[4] Ohm
[5] Current Source
[6] VCCS: Voltage Controlled Current Source
[7] Mutual Conductance
[8] Transconductance
[9] Siemens

ضریب تبدیل یک *منبع جریان وابسته به جریان*[1] را *بهره جریان*[2] گویند و آنرا با A_i (و گاهی β) نمایش میدهند. بنا به تعریف:

$$A_i \equiv \frac{\partial i_O}{\partial i_I} \qquad (۱-۱۶)$$

A_i کمیتی بدون واحد است. برای یک CCCS ایده آل: $v_I \equiv 0$

تذکر: در برنامه PSpice برای مشخص کردن عناصر فقط یک حرف بکار میرود. در جدول ۱-۱ نحوه نمایش منابع وابسته ذکر شده است.

جدول ۱-۱ حروف مشخص کننده منابع وابسته

منبع	کتاب‌های درسی	PSpice
VCVS	A_v (μ)	E
CCCS	A_i (β)	F
VCCS	G_m	G
CCVS	R_m	H

۱-۵ دقت در محاسبات و اندازه گیری

بر خلاف مقادیر عددی ریاضی که بطور دلخواه می‌توان آنها را دقیق[3] بدست آورد[4]، در دنیای واقعی دقت تولید، و اندازه‌گیری محدود است.

---

[1] CCCS: Current Controlled Current Source

[2] Current Gain

[3] Precision، دقت

[4] مثلاً ۲ = √٤ و ۲ یعنی ۲ ممیز، تا بینهایت صفر! و یا عدد π را مثلاً می توان تا ۱۵۰ رقم اعشار بدست آورد یا ... .

برای مثال اگر در محاسبه قطر استوانه‌ای، d = 5mm (یعنی $5.00\cdots\infty\cdots00$) بدست آمد، در عمل ممکن است مقدار واقعی قطر استوانه d' = 4.95mm ساخته، و هنگام اندازه گیری d" = 4,9mm خوانده شود. از آن جایی که مقدار واقعی را نمی‌دانیم چقدر است! (چرا؟) مقدار اندازه‌گیری شده، معیار بررسی‌ها قرار می‌گیرد. طبیعتاً هر قدر دستگاه اندازه‌گیری دقیقتر و روش اندازه‌گیری صحیحتر باشد، مقدار اندازه‌گیری شده به مقدار واقعی نزدیکتر خواهد بود.

- **مقدار نامی:** بنا به تعریف، مقدار محاسبه شده برای ساخت یک عنصر (در مثال فوق $5mm$) را *مقدار نامی*[1] آن کمیت گویند ($d_n = 5mm$).
- **خطای مطلق:** در صورتیکه خطای اندازه‌گیری قابل اغماض باشد (اندازه‌گیری ایده‌آل)، به اختلاف بین مقدار اندازه‌گیری شده یک کمیت (X_m) و مقدار نامی آن (X_n)، *خطای مطلق*[2] (E_{abs}) گفته میشود.

$$E_{abs} = X_m - X_n \qquad (۱-۱۷)$$

توجه شود که کمیت[3] خطای مطلق همان کمیت مقدار نامی است. برای مثال:

$$d_n = 5mm, \qquad d_m = 4.98mm \qquad \Rightarrow \qquad E_{abs} = d_m - d_n = -0.02mm$$

- **خطای نسبی:** میزان خطای مطلق نسبت به مقدار نامی را، *خطای نسبی*[4] (E_{rel}) گویند:

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{X_n} = \frac{X_m - X_n}{X_n} \qquad (۱-۱۸)$$

توجه شود که خطای نسبی کمیتی بدون واحد است که معمولاً آنرا برحسب ٪ (در صد) بیان میکنند؛ یا برای دقتهای بالا به ppm[5] می‌سنجند. مثلاً برای مثال فوق:

---

[1] Nominal Value
[2] Absolute Error
[3] Dimension
[4] Relative Error
[5] ppm: Parts Per Million (10^{-6})

$$d_n = 5mm, \qquad E_{abs} = -0.02mm \qquad \Rightarrow \qquad E_{rel} = \frac{E_{abs}}{d_n} = -0.4\%$$

- **تلرانس**: از آن جایی که هنگام ساخت قطعات، معلوم است که به مقدار محاسبه شده نمی‌توان دست یافت، لذا از قبل محدوده‌ی خطایِ مجازِ تولید را تعریف می‌کنند. بعنوان مثال، پس از محاسبه‌ی $d = 5mm$، در دستورالعمل ساخت، مثلاً $d = 5mm \pm 0.1mm$ یا $d = 5mm \pm 2\%$[1] ذکر می‌شود. به حداکثر خطای مجاز نسبی تولید، *تلرانس*[2] گویند.
- **انحراف معیار**: از آن‌جایی‌که به هنگام تولید تعداد زیادی قطعه[3] با مقدار نامی یکسان، مقادیر واقعی یکسان نخواهند بود، بعبارت دیگر هنگام اندازه‌گیری یک کمیت -به دلیل خطا در اندازه‌گیری- مقدار واقعی مشخص نخواهد بود، برای حصول اطمینان بیشتر از مقادیر بدست آمده، از روابط آماری در تعیین مقدار یک کمیت استفاده می‌کنند. برای مثال اگر ولتاژ یک باطری را ده بار متوالی با یک ولت‌متر اندازه‌گیری کنیم، در حالت کلی، ده مقدار مختلف بدست خواهیم آورد. علت این امر وجود نویز، غیر ایده‌آل بودن ولت-متر، ... است. یا اگر صد عدد مقاومت با مقادیر نامی برابر را اندازه‌گیری کنیم (حتی در شرایط ایده‌آل)، صد مقدار مختلف بدست خواهیم آورد! طبق اصول آمار و احتمالات، نزدیکترین مقدار به مقدار واقعی، میانگین[4] مقادیر اندازه‌گیری شده است.

$$Avg\ (X) = X_{av} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad (۱۹-۱)$$

---

[1] این نحوه نگارش از نظر فیزیکی اشتباه است، منظور $d = 5mm(1 \pm 0.02)$ بعبارت دیگر $d = 4.9 \cdots 5.1mm$ می‌باشد.

[2] Tol.: Tolerance

[3] عنصر، المان، Element, Component

[4] Avg: Average

هر قدر مقادیر اندازه‌گیری شده به هم نزدیکتر باشند، بعبارت دیگر تغییرات مقادیر نسبت به یکدیگر کمتر باشد، دقت بیشتر است. یکی از مفاهیمی که برای بیان این منظور به کـار می‌رود *واریانس*[1] نام دارد، که طبق رابطه (۱-۲۰) تعریف می‌شود.

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{av})^2}{(n-1)} \qquad (۲۰-۱)$$

در عمل، اکثراً از جذر واریانس استفاده می‌کنند، که به آن *انحراف معیار*[2] گویند.

$$s = \sqrt{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{av})^2}{(n-1)}} \qquad (۲۱-۱)$$

- **تخمین خطا و تقریب در محاسبات:** این مطلب درست است که در محاسبات می‌توان به هر دقت مطلوب دست یافت، ولی این امر اولاً هزینه بر است (مالی و زمـانی)، ثانیـاً غیـر ضروری. برای مثال اگر دو عدد مقاومت $R_1 = 6k\,\Omega$ و $R_2 = 7k\,\Omega$ را باهم موازی کنیم:

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 3.2307692307\cdots\, k\,\Omega$$

محاسبه می‌شود. این مقدار با یک دقت بسیار بالایی (خطای بـسیار کمـی) بدسـت آمـده است ($|E_{abs}| < 0.1\mu\Omega$ ، $|E_{rel}| < 3\cdot 10^{-11}$ (چرا؟)). در عمل محاسبه با چنـین دقـت-هایی بی معنی است؛ زیرا همان طور که میدانیم، در دنیای واقعی مقاومت‌ها دارای تلرانس هستند. اگر فرض کنیم تلرانس مقاومت‌های استفاده شده $Tol. = \pm 10\%$ باشد، در بدترین حالت:

$$R_{eq} = 2.9076923\ldots \;\cdots\; 3.5538461\ldots\; k\,\Omega$$

---

[1] Variance
[2] Standard Deviation

خواهد بود (چرا؟). بنابراین اگر $R_{eq} \approx 3.2k\,\Omega$ در نظر گرفته شود مقدار معقولی خواهد بود. به همین ترتیب اگر $Tol. = \pm 1\%$ باشد، محاسبه $R_{eq} \approx 3.23k\,\Omega$ قابل قبول است.

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنیم دو مقاومت $R_1 = 1k\,\Omega$ و $R_2 = 1M\,\Omega$ را باهم به صورت سری یا موازی ببندیم؛ در این صورت:

$$R_s = R_1 + R_2 = 1.001M\,\Omega, \quad R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.999000999\cdots k\,\Omega$$

حال اگر تلرانس مقاومت‌ها $Tol. = \pm 0.1\%$ باشد، $R_s = 1.001M\,\Omega$ و $R_p = 0.999k\,\Omega$ باید در نظر گرفته شوند. در صورتی که اگر تلرانس مقاومت‌ها $Tol. = \pm 10\%$ یا حتی $Tol. = \pm 1\%$ باشد:

$$R_s = R_1 + R_2 = 1.001M\,\Omega \approx 1M\,\Omega = R_2 \qquad \Rightarrow \qquad R_s \approx R_2$$

و:

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0.999k\,\Omega \approx 1k\,\Omega = R_1 \qquad \Rightarrow \qquad R_p \approx R_1$$

از مثال‌های فوق نتیجه می‌گیریم که محاسبات فقط تا حد لازم (و معقول) باید دقیق انجام شوند. این *"حدلازم"* توسط مقدار و تلرانس عناصر بعبارت دیگر نسبت اثر گذاری عناصر در مدار، مشخص می‌شود. اگر دو مقاومت با هم سری باشند، میزان تأثیر مقاومت بزرگتر، در مدار بیشتر است. لذا اگر مقدار مقاومتی *"خیلی"* بزرگتر از مقاومت دیگر باشد، از اثر مقاومت کوچکتر می‌توان صرفنظر کرد. هم‌چنین اگر دو مقاومت با هم موازی باشند، میزان تأثیر مقاومت کوچکتر، در مدار بیشتر است. لذا اگر مقدار مقاومتی *"خیلی"* بزرگتر از مقاومت دیگر باشد، از اثر آن می‌توان صرفنظر کرد. بنابراین با توجه به مقدار المان‌های به کار رفته، دقت آنها و نحوه استفاده آنها در مدار، قبل از حل شبکه (معادلات

مربوطه)، می‌توان حدود جواب را *"تخمین"* زده، دقت لازم برای محاسبات را مشخص نمود. در صورتی که ظرفیت عنصری در دقت محاسبات تأثیر قابل توجهی نداشته باشد، آن المان از مدار حذف می‌شود. در مثال فوق بجای سری کردن دو مقاومت، فقط مقاومت R_2 و بجای موازی کردن دو مقاومت، فقط مقاومت R_1 در نظر گرفته شده است. ممکن است این سوال پیش آید که: محاسبه دو مقاومت سری یا موازی که مسئله پیچیده‌ای نیست؛ پس چرا باید فکر کرد، تخمین زد و یکی از مقاومت‌ها را حذف نمود؟ در جواب باید گفت که:

اولاً: فکر کردن همیشه خوبست! یک مهندس، ماشین حساب نیست که فقط محاسبات را انجام دهد. یک کامپیوتر از سریعترین آدم هم سریعتر و هم دقیقتر محاسبه می‌کند. برتری انسان بر ماشین، فکر کردنش است! فکر کردن باعث می‌شود تا مدار یا سیستم را بهتر بشناسیم. اگر از قبل بتوانیم حدود جواب را تخمین بزنیم، اگر پس از محاسبه به جوابِ دور از انتظار برسیم، نتیجه می‌گیریم که باید جایی در محاسبات اشتباه کرده باشیم.

ثانیاً: مدارها همواره مانند مثال فوق ساده نیستند. اگر در شبکه‌ای ده عنصر وجود داشته باشد، در حالت کلی حل آن شبکه از روش‌های تحلیلی و بصورت دستی بسیار مشکل یا حتی عملاً غیر ممکن است، در صورتیکه در مدارهای واقعی اکثراً از اثر خیلی از عناصر در مقابل بعضی از آنها می‌توان صرفنظر کرده مشخصات خواسته شده مدار را با تقریب خوب بدست آورد. مثلاً ممکن است با حذف المان‌های کم اثر گذار در مدار، از یک دستگاه ۸ معادله، ۸ مجهولی به یک دستگاه ۳ معادله، ۳ مجهولی دست یافت. طبیعتاً حل این دستگاه ساده‌تر و امکان خطای محاسباتی بسیار کمتر است. پس از بدست آوردن

جواب‌های تقریبی، در صورت نیاز به دقت‌های بالاتر، می‌توان از برنامه‌های شبیه‌ساز (مانند PSpice) استفاده کرد.

۱-٦ تحلیل شبکه‌های الکتریکی

هر گاه پایه‌های حداقل دو المان الکتریکی به یک دیگر وصل شوند، به آن ترکیب، یک *مدار الکتریکی*[1] گویند. محل اتصال پایه‌ها، *گره*[2] نامیده می‌شود. اگر چند عنصر به طوری به هم وصل شوند، که تشکیل یک مسیر بسته را دهند، به آن مسیر، یک *حلقه*[3] گویند. اگر در فاصله بین دو نقطه مجاور در یک مدار، مسیر جریان قطع باشد، گویند *مدار باز*[4] است. اگر در فاصله بین دو نقطه مجاور در یک مدار، المانی وجود نداشته، آن دو مستقیماً به یک دیگر وصل باشند، گویند مدار *اتصال کوتاه*[5] شده است. گاهی اوقات به مدارهای مفصلتر، *شبکه‌های*[6] الکتریکی گفته می‌شود. هدف از حل شبکه‌های الکتریکی، بدست آوردن ولتاژها و جریان‌های آن شبکه است. به قضایا و قوانین مداری که بکمک آنها می‌توان مدارهای الکتریکی را تحلیل کرد، *قضایای شبکه*[7] گویند؛ که در این بخش به معرفی برخی از آنها می‌پردازیم.

۱-٦-۱ قانون اهم

در سال ۱۸۲۷ میلادی گئورگ زیمون اهم[8] کتابی[9] منتشر کرد [1] که در آن ثابت شده بود که رابطه بین ولتاژ دو سر یک هادی با جریان گذرنده از آن یک رابطه خطی است.

$$v = \frac{\rho \cdot l}{A} i = R \cdot i \qquad (۲۲-۱)$$

---

[1] Electric Circuit
[2] Node
[3] Mesh
[4] Open-Circuit
[5] Short-Circuit
[6] (Electric) Networks
[7] Network Theorems
[8] Georg Simon Ohm (۱۷۸۹-۱۸۵٤) استاد دانشگاه مونیخ
[9] The Galvanic Circuit Investigated Mathematically

که در این رابطه l طول هادی، A سطح مقطع آن و ρ یک ضریب است که در دمای ثابت برای جنس مشخص هادی، مقداری ثابت می‌باشد. اهم ضریب تناسب را *مقاومت*[1] هادی نامید. بعدها به افتخار این دانشمند، این رابطه را *قانون اهم*[2] نامیدند.

بعدها این قانون را برای سایر عناصر (غیرخطی در ناحیه خطی شده (مثلاً مقاومت دینامیکی دیود[3])، خازن، سلف، ...) تعمیم دادند. برای مثال می‌توان برای جریان‌های سینوسی قانون اهم را به صورت رابطه (۱-۲۳) بیان کرد:

$$\mathbf{V} = Z \cdot \mathbf{I} \qquad (۱-۲۳)$$

که در این رابطه Z *امپدانس*[4] المان دو سر (در حالت کلی ترکیبی از R، C و L)، $\mathbf{V}$ *فازور*[5] ولتاژ و $\mathbf{I}$ فازور جریان نام دارد. امپدانس را به صورت اعداد مختلط[6] و به فرم کارتزین[7] $Z = x + jy$ یا قطبی[8] $Z = \rho \cdot e^{j\varphi}$ نمایش می‌دهند؛ که j واحد موهومی[9]، ρ دامنه، قدرمطلق یا مقدار[10] و φ فاز یا زاویه[11] می‌باشند. رابطه بین این مقادیر طبق:

$$\rho = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (۱-۲٤ \text{ الف})$$

$$\varphi = \angle Z = \arctan \frac{y}{x} \qquad (۱-۲٤ \text{ ب})$$

بیان می‌شود.

---

[1] Resistance
[2] Ohm's Law
[3] رک به فصل ٤ یا درس اصول مهندسی برق
[4] مقاومت ظاهری، Impedance
[5] Phasor
[6] Complex Numbers
[7] Cartesian
[8] Polar
[9] Imaginary Unit
[10] Magnitude
[11] Angel

در بخش ۱-٤-۲ دیدیم که برای یک خازن:

$$V_p = \frac{I_p}{C\omega}\ , \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} \qquad (٦-١)$$

با مقایسه با رابطه (۱-۲۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{V}_C = Z_C \cdot \mathbf{I}_C\,, \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -\frac{\pi}{2} \qquad (٢٥-١)$$

چنان که ملاحظه می‌شود، امپدانس خازن فقط دارای مؤلفه موهومی است (مؤلفه حقیقی آن صفر است). به همین دلیل به "امپدانس" خازن، *رأکتانس*[1] خازن گویند و آن را با X_C نمایش می‌دهند.

به همین ترتیب برای یک سلف از:

$$V_p = L\omega\,.\,I_p, \qquad \varphi = +\frac{\pi}{2} \qquad (١٠-١)$$

و با مقایسه با رابطه (۱-۲۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{V}_L = Z_L \cdot \mathbf{I}_L, \qquad Z_L = j\omega L = \omega L\angle\frac{\pi}{2} \qquad (٢٦-١)$$

چنان که ملاحظه می‌شود، امپدانس سلف نیز فقط دارای مؤلفه موهومی است (مؤلفه حقیقی آن صفر است). به همین دلیل به "امپدانس" سلف، رأکتانس سلف گویند و آن را با X_L نمایش می‌دهند.

با مقایسه دو رابطه (۱-۱) و (۱-۲۳) برای جریان سینوسی گذرنده از یک مقاومت:

$$V_p = R\cdot I_p,\ \ \mathbf{V}_R = Z_R \cdot \mathbf{I}_R \quad \Rightarrow \quad Z_R = R = R\angle 0 \qquad (٢٧-١)$$

نتیجه می‌گیریم که امپدانس مقاومت فقط دارای مؤلفه حقیقی است (مؤلفه موهومی آن صفر است). به همین دلیل به "امپدانس" مقاومت، *رزیستانس*[2] گویند و آن را با R نمایش می‌دهند.

---

[1] Reactance
[2] Resistance

۱-٦-۲ قوانین کیرشهف

در سال ۱۸٤٥ گوستاو روبرت کیرشهف[1]، در زمانی که هنوز دانشجو بود، در قالب یک سمینار درسی دو قانون در مورد مدارهای الکتریکی مطرح کرد، که بعداً به عنوان تز دکترای خود از آن دفاع نمود. این قوانین بعدها به افتخار او *قوانین کیرشهف*[2] نامیده شدند[3] [2, 3].

- **قانون جریان:** *مجموع جریان‌های وارد شده به یک گره برابر است با مجموع جریان‌های خارج شده از آن گره.* در این درس این قانون "KCL"[4] نامیده می‌شود. در کتب و مقالات این قانون بنامهای دیگری نیز شناخته می‌شود[5].

$$KCL: \sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \qquad n, k \in \mathbf{N} \qquad (۲۸-۱)$$

- **قانون ولتاژ:** *مجموعه ولتاژهای یک حلقه صفر است.* در این درس این قانون "KVL"[6] نامیده می‌شود. در کتب و مقالات این قانون بنامهای دیگری نیز شناخته می‌شود[7].

$$KVL: \sum_{k=1}^{n} V_k = 0, \qquad n, k \in \mathbf{N} \qquad (۲۹-۱)$$

---

[1] Gustav Robert Kirchhoff
[2] Kirchhoff's Circuit Laws
[3] کیرشهف، علاوه بر دو قانون الکتریکی فوق، سه قانون هم در زمینه اسپکتروسکپی دارد. وی در سال ۱۸٦۱ سزیوم و روبیدیوم را با همکاری روبرت بونزن کشف کرد.
[4] KCL: Kirchhoff's Current Law
[5] Kirchhoff's first law, Kirchhoff's point rule, Kirchhoff's junction rule, and Kirchhoff's first rule.
[6] KVL: Kirchhoff's Voltage Law
[7] Kirchhoff's second law, Kirchhoff's loop (or mesh) rule, and Kirchhoff's second rule

۱-٦-۳ قضیه تونن

در سال ۱۸۸۳ لؤن شارل تونن[1]، با مطالعه قوانین اهم و کیرشهف قضیه معروف[2] خود را [4] چنین بیان نمود:

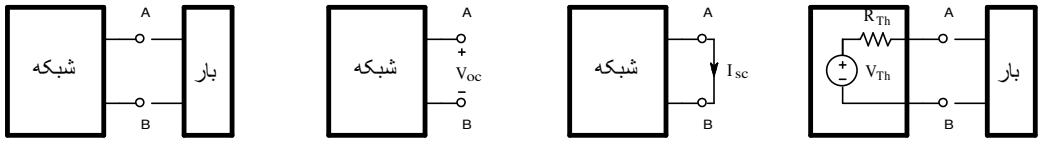
بین دو نقطه از هر شبکه خطی؛ که شامل مقاومت، منابع ولتاژ و جریان DC باشد؛ میتوان مدار معادلی در نظر گرفت، که از یک منبع ولتاژ ایده‌آل و یک مقاومت سری با آن تشکیل شده است. بعدها این قضیه چنین تکمیل شد: *چنانکه مدار شامل منابع AC باشد؛ در صورتیکه تمام منابع، سینوسی با فرکانس یکسان باشند، مدار معادل از یک منبع ولتاژ با همان فرکانس، سری با یک امپدانس تشکیل می‌شود. باید توجه شود که این مدار از دید یک بار خارجی که به این دو سر وصل می‌شود، معادل هستند. ولی در حال کلی دلیلی ندارد که کلیه خواص این دو مدار با هم یکسان باشند. بار خارجی می‌تواند شامل عناصر خطی یا غیر خطی، مصرف کننده، ذخیره کننده یا تولید کننده انرژی، یا هر ترکیب دلخواه دیگری باشد.*

بدست آوردن ولتاژ تونن و مقاومت تونن، در حالت کلی در دو مرحله انجام می‌شود (شکل ۱-۲)؛ اول نسبت به دو نقطه مطلوب، مدار را باز در نظر گرفته ولتاژ را بدست می‌آورند (V_{oc})؛ سپس آن دو نقطه را اتصال کوتاه کرده جریان را بدست می‌آورند (I_{sc}). مقادیر ولتاژ و مقاومت طبق رابطه (۱-۳۰) بدست می‌آید.

قبل از تونن، هرمان فون هلمهولتز[3] درسال ۱۸۵۸ این قضیه را مطرح کرده بود، ولی به آن توجه نشد [4].

---

[1] Léon Charles Thévenin
[2] Thévenin's Theorem
[3] Hermann von Helmholtz



شکل ۱-۲ نحوه بدست آوردن ولتاژ و مقاومت تونن

$$V_{Th} = V_{oc} \qquad R_{Th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} \qquad (۳۰-۱)$$

۱-٦-٤ قضیه نورتن

در سال ۱۹۲٦ به طور هم‌زمان و مستقل از یک‌دیگر، قضیه زیرکه *قضیه نورتن*[1] نامیده می‌شود، توسط هانس فردیناند مایر[2] و ادوارد لاوری نورتن[3] بیان شد [5].

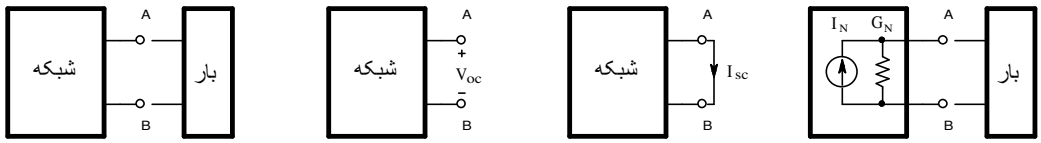
بین دو نقطه از هر شبکه خطی؛ که شامل مقاومت، منابع ولتاژ و جریان DC باشد؛ میتوان مدار معادلی در نظر گرفت، که از یک منبع جریان ایده‌آل و یک مقاومت موازی با آن تشکیل شده است. بعدها این قضیه چنین تکمیل شد: *چنانکه مدار شامل منابع AC باشد؛ در صورتیکه تمام منابع، سینوسی با فرکانس یکسان باشند، مدار معادل از یک منبع جریان با همان فرکانس، موازی با یک امپدانس تشکیل می‌شود. باید توجه شود که این مدار از دید یک بار خارجی که به این دو سر وصل می‌شود، معادل هستند. ولی در حال کلی دلیلی ندارد که کلیه خواص این دو مدار با هم یکسان باشند. بار خارجی می‌تواند شامل عناصر خطی یا غیر خطی، مصرف کننده، ذخیره کننده یا تولید کننده انرژی، یا هر ترکیب دلخواه دیگری باشد.*

---

[1] Norton's Theorem
[2] Hans Ferdinand Mayer
[3] Edward Lawry Norton

بدست آوردن جریان و مقاومت نورتن، در حالت کلی در دو مرحله انجام می‌شود (شکل ۱-۳)؛ اول نسبت به دو نقطه مطلوب، مدار را باز در نظر گرفته ولتاژ را بدست می‌آورند (V_{oc})؛ سپس آن دو نقطه را اتصال کوتاه کرده جریان را بدست می‌آورند (I_{sc}). مقادیر ولتاژ و مقاومت طبق رابطه (۱-۳۱) بدست می‌آید.

چنان که ملاحظه می‌شود؛ قضیه نورتن همان قضیه تونن است، که در آن منبع جریان جانشین منبع ولتاژ شده است.



شکل ۱-۳ نحوه بدست آوردن ولتاژ و مقاومت نورتن

$$I_N = I_{sc} \qquad G_N = \frac{I_{sc}}{V_{oc}} \qquad (R_N = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}) \qquad (۱-۳۱)$$

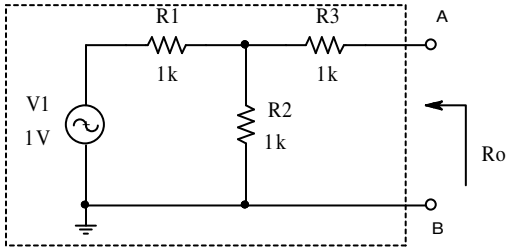
از روابط (۱-۳۰) و (۱-۳۱) نتیجه می‌شود:

$$R_N = R_{Th} \qquad I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \qquad V_{Th} = R_N \cdot I_N \qquad (۱-۳۲)$$

در صورتی که در شبکه منابع وابسته وجود نداشته باشد، گاهی وقت‌ها ساده‌تر است که بجای بدست آوردن ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه، تمام منابع را صفر کرده مقاومت معادل مدار را بدست آورد. منظور از صفر کردن منابع، یعنی اینکه منابع ولتاژ را با اتصال کوتاه و منابع جریان را با اتصال باز جانشین نمود.

مثال ۱-۱ مقاومت خروجی مدار شکل ۱-٤ را بدست آورید.

حـل: منظـور از مقاومـت خروجـی مقاومـت معادل تونن (نورتون) از دید درگـاه خروجـی (در این مثال مقاومت دیده شده بین دو پایه A و B) است. در این حالت ولتاژ مدار باز برابر است با:



شکل ۱-٤ مدار مثال ۱-۱

$$v_{oc} = V1 \cdot \frac{R2}{R1+R2} = 1 \cdot \frac{1}{1+1} = 1/2V$$

و جریان اتصال کوتاه عبارت است از:

$$i_{sc} = \frac{V1}{R1+\left(R2 \| R3\right)} \cdot \frac{R2}{R2+R3} = \frac{1}{1+0.5} \cdot \frac{1}{2} = 1/6mA$$

و در نتیجه:

$$Ro \equiv R_{Th} \equiv \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{1/2}{1/6} = 1.5k\,\Omega$$

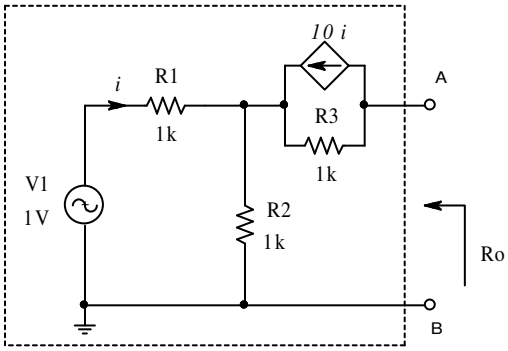
تذکر: برای سادگی در نوشتن روابط از ذکر واحدها صرفنظر شده است. ولی باید دقـت کـرد کـه واحدها بر حسب: V، mA و $k\,\Omega$ در نظر گرفته شده‌اند.

چنانکه ملاحظه می‌شود، با وجود اینکه این مدار بسیار ساده بوده و فقط شامل یک منبع اسـت، راه حل نسبتاً طولانی و وقت‌گیر می‌باشد. در صورتی که اگر منابع را صفر کنیم (در ایـن مـدار فقـط یـک منبع ولتاژ، که اتصال کوتاه در نظر گرفته می‌شود)، مقاومت معادل برابر است با:

$$Ro \equiv R_{Th} \equiv R_{eq} = R3 + \left(R1 \| R2\right) = 1.5k\,\Omega$$

مثال ۱-۲ مقاومت خروجی مدار شکل ۱-۵ را بدست آورید.

حل: در این مدار:

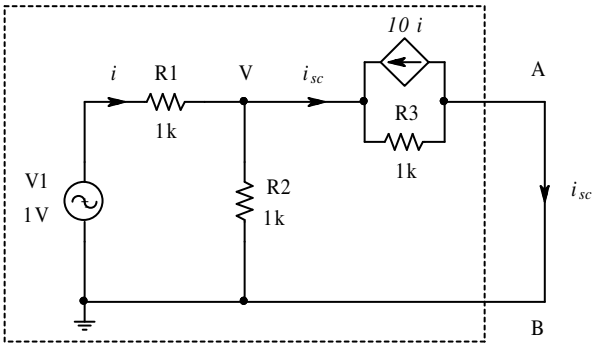


شکل ۱-۵ مدار مثال ۱-۲

$$i = \frac{V1}{R1+R2} = 0.5mA$$

$$v_{oc} = V1 - i \cdot R1 - 10i \cdot R3 = -4.5V$$

برای محاسبه جریان اتصال کوتاه با توجه به شکل ۱-۵ الف داریم:



شکل ۱-۵ الف نحوه محاسبه جریان اتصال کوتاه برای مدار مثال ۱-۲

$$\begin{cases} \dfrac{V-V1}{R1} + \dfrac{V}{R2} + i_{sc} = 0 \\ V = (i_{sc} + 10 \cdot i) \cdot R3 \\ i = \dfrac{V1 - V}{R1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{V-1}{1} + \dfrac{V}{1} + i_{sc} = 0 \\ V = (i_{sc} + 10 \cdot i) \cdot 1 \\ i = \dfrac{1-V}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V + i_{sc} = 1 \\ V - i_{sc} - 10 \cdot i = 0 \\ V + i = 1 \end{cases}$$

و از حل دستگاه سه معادله – سه مجهولی فوق $i_{sc} = -9/13mA$ و از آن‌جا:

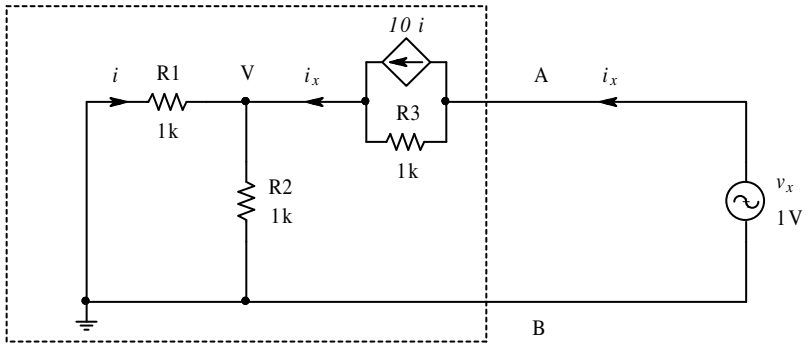
$$Ro \equiv R_{Th} \equiv \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = \frac{-9/2}{-9/13} = 6.5k\,\Omega$$

بدست می‌آید.

تذکر ۱: در این مدار نمی‌توان از مقاومت معادل استفاده کرد، زیرا شامل منبع وابسته است!

$$Ro \equiv R_{Th} \equiv R_{eq} = R3 + \left(R1 \| R2\right) = 1.5k\,\Omega \neq 6.5k\,\Omega$$

تذکر ۲: برای محاسبه مقاومت خروجی در مدارهایی که شامل منابع وابسته هستند، روش دیگری وجود دارد که اغلب ساده‌تر از روش فوق است. در این روش نیز کلیه منابع مستقل را صفر می‌کنند. در خروجی یک منبع ولتاژ یا منبع جریان مستقل را قرار داده، نسبت ولتاژ به جریان را محاسبه می‌کنند. در شکل ۱-٦ نحوه استفاده از این روش نمایش داده شده است.



$$\begin{cases} v_x = (i_x - 10i)R3 + i_x(R1 \| R2) \\ i = -i_x \cdot \dfrac{R2}{R1+R2} \end{cases} \Rightarrow \quad v_x = \left[\left(1 + 10 \cdot \frac{R2}{R1+R2}\right)R3 + \left(R1 \| R2\right)\right] i_x = 6.5 i_x$$

و در نتیجه:

$$Ro \equiv R_{Th} \equiv \frac{v_x}{i_x} = 6.5k\,\Omega$$

۱-٦-۵ قضیه جمع آثار

همانطور که اشاره شد، برای تحلیل کلیه شبکه‌های الکتریکی، قوانین اهم و کیرشهف کفایت می‌کنند. قوانین دیگر مداری به نحوی برگرفته از قوانین فوق بوده در شرایط خاص ممکن است باعث ساده‌تر شدن تحلیل مدار شوند. طبیعتاً این قوانین محدودیت‌هایی دارند که نمی‌توان در تمام موارد از آنها استفاده کرد. یکی از این قوانین، قضیه جمع *آثار*[1] است که به صورت زیر بیان می‌شود:

*پاسخ یک سیستم **خطی** به چند تحریک، برابر است با حاصل جمع پاسخهای سیستم به تک تک تحریک‌ها. بنابراین برای بدست آوردن ولتاژ یک گره یا جریان یک شاخه در یک شبکه که شامل چند منبع است، بدین طریق عمل می‌شود: همه منابع بجز یکی را صفر کرده، جواب را برای این منبع بدست می‌آوریم. سپس بار دیگر مدار را برای منبع دوم حل می‌کنیم. این عمل آنقدر تکرار می‌شود، تا اثر کلیه منابع بر روی مدار بدست آید. جواب مسئله عبارت است از مجموع جواب‌های حاصله.*

تذکر: در صورتی که مدار شامل منابع وابسته باشد، آنها را باید همزمان با منابع مستقلی که به آن وابسته هستند، در نظر بگیریم. یعنی این که: نمی‌توان آنها را فعال در نظر گرفت، در صورتیکه منبع اصلی صفر است؛ یا هنگامیکه میخواهیم پاسخ مدار را نسبت به یک منبع مستقل بدست آوریم، نمی‌توان آن منبع وابسته را صفر کرد.

مثال ۱-۳ در مدار شکل ۱-۷ الف؛ V_o را با استفاده از قضیه جمع آثار محاسبه کنید.

---

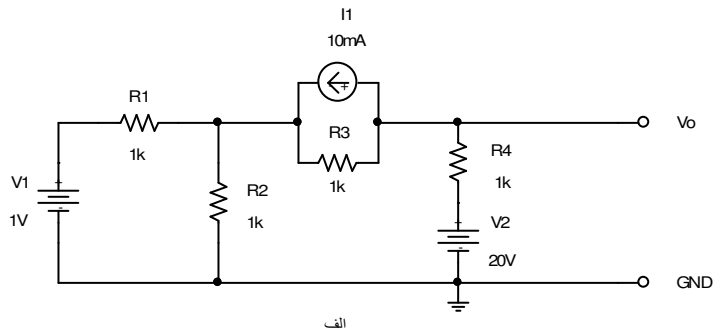
[1] جمع اثرها، سوپرپوزیسیون، Superposition

حل: مدار شامل سه منبع غیر وابسته است، لذا ولتاژ خروجی از مجموع سه مؤلفه V_o'، V_o'' و V_o''' حاصل می‌شود. در شکل ۱-۷ ب، مؤلفه مدار که بکمک آن اثر منبع $V1$ بررسی می‌شود، نشان داده شده است. در این شکل دو منبع دیگر صفر شده‌اند، یعنی $I1$ با یک مدار باز و $V2$ با یک اتصال کوتاه جانشین شده‌اند. بنابراین مدار به صورت ساده‌ای، که شامل فقط یک منبع و چند مقاومت است در می‌آید. مقاومت‌های دیده شده از سوی $R1$ را به صورت یک مقاومت معادل (R') در نظر گرفته و بکمک تقسیم ولتاژ بین این دو مقاومت، مؤلفه ولتاژ خروجی متأثر از این منبع: $V_o' = 0.2V$ بدست می-آید.

به همین نحو در شکل ۱-۷ ج، فقط $I1$ مؤثر بوده $V1$ و $V2$ با اتصال کوتاه جانشین شده‌اند. بکمک در نظر گرفتن مقاومت معادل و استفاده از رابطه تقسیم جریان، $V_o'' = -4V$ بدست می‌آید.

بالاخره از شکل ۱-۷ د پاسخ به $V2$ محاسبه میشود ($V_o''' = 12V$).در نتیجه:

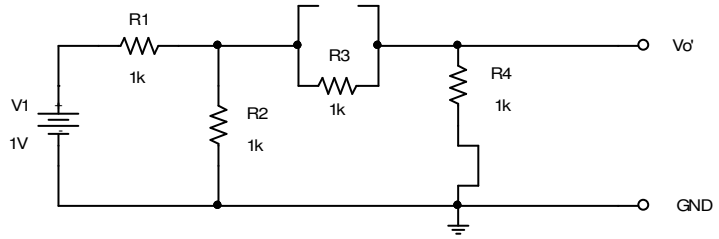
$$V_o = V_o' + V_o'' + V_o''' = 0.2V - 4V + 12V = 8.2V$$



الف

$$V_o = V_o' + V_o'' + V_o'''$$

=

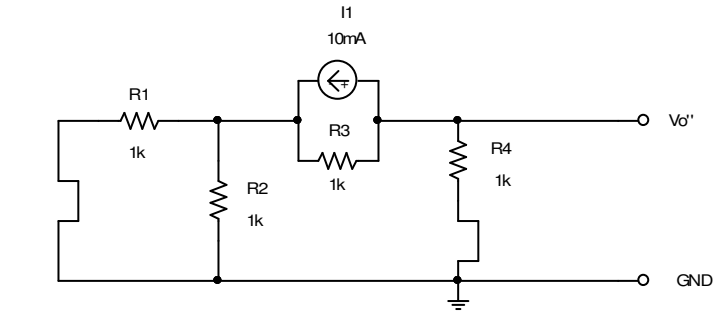


ب

$$R' = R2 \| (R3 + R4) = \frac{2}{3} k\Omega$$

$$V_o' = \frac{R'}{R + R1} \cdot V1 \cdot \frac{R4}{R4 + R3} = 0.2V$$

+

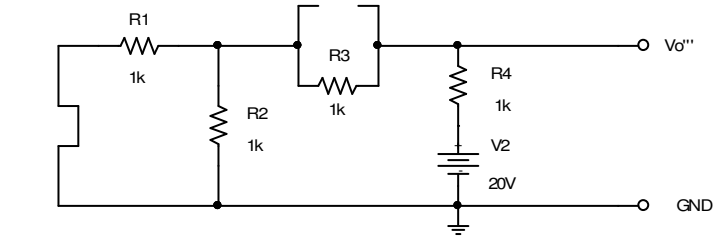


ج

$$R'' = (R1 \| R2) + R4 = 1.5k\Omega$$

$$V_o'' = I1 \cdot \frac{R3}{R3 + R''} \cdot R4 = -4V$$

+



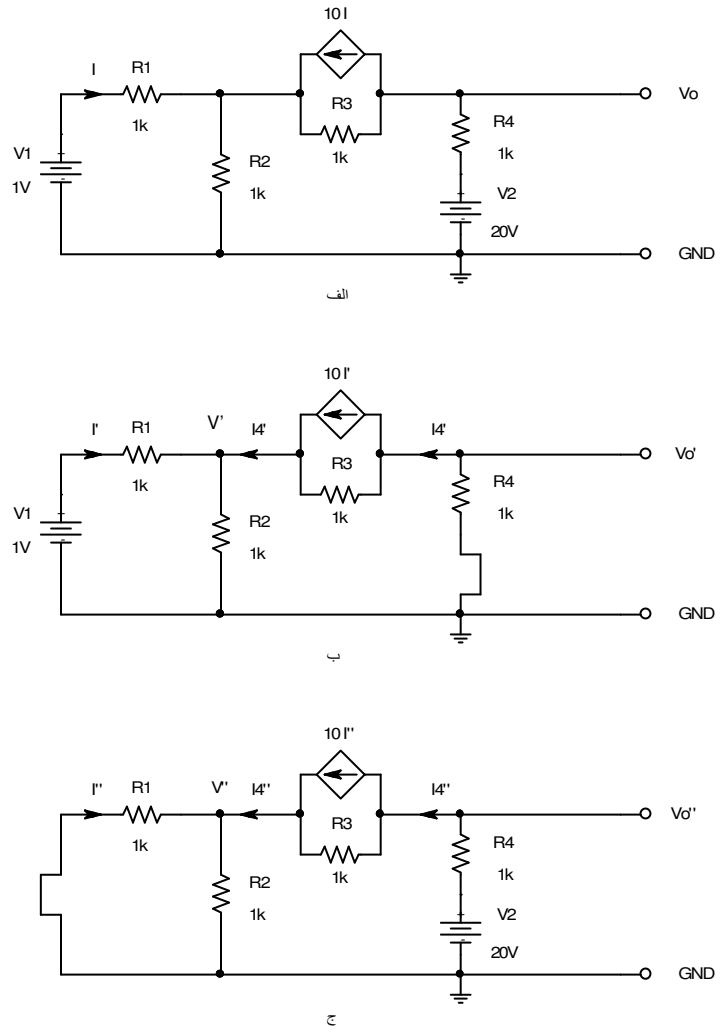
د

$$R''' = R3 + (R1 \| R2) = 1.5k\Omega$$

$$V''' = \frac{R'''}{R''' + R4} \cdot V2 = 12V$$

شکل ۱-۷ نحوه حل شبکه بکمک قضیه جمع آثار: الف- مدار مثال ۱-۳، ب- مؤلفه مدار به تحریک V1،
ج- مؤلفه مدار به تحریک I1 و د- مؤلفه مدار به تحریک V2

مثال ۱-٤ در مدار شکل ۱-۸ الف؛ V_o را با استفاده از قضیه جمع آثار محاسبه کنید.



شکل ۱-۸ نحوه حل شبکه شامل منبع وابسته، بکمک قضیه جمع آثار: الف- مدار مثال ۱-٤،
ب- مؤلفه مدار به تحریک V1، ج- مؤلفه مدار به تحریک V2

حل: مدار شامل سه منبع - دو منبع مستقل و یک منبع وابسته - است. در شکل ۱-۸ ب، اثر V_1 بر روی مدار بررسی می‌شود؛ لذا $V_2 = 0$ قرار داده میشود. در این حالت چون $I' \neq 0$، لذا نمی‌توان منبع جریان را صفر کرد، زیرا: $I_{Current\ Source} = 10 \times I' \neq 0$ و در نتیجه:

$$\begin{cases} I' = \dfrac{V_1 - V'}{R_1} \\ I' + I_4' - \dfrac{V_1}{R_2} = 0 \\ V' + (I_4' - 10 \cdot I') \cdot R_3 + I_4' \cdot R_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V' = 1 - I' \\ 2I' + I_4' = 1 \\ 11I' - 2I_4' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I' = 0.2mA \\ I_4' = 0.6mA \end{cases}$$

$$V_o' = -I_4' R_4 = -0.6V$$

به همین ترتیب اثر V_2 بر روی مدار، بکمک شکل ۱–۸ ج محاسبه می‌شود.

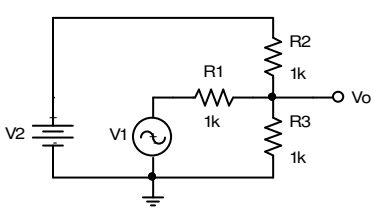
$$\begin{cases} V_2 - I_4'' R_4 - (I_4'' - 10I'')R_3 - I_4''(R_1 \| R_2) = 0 \\ I'' = -I_4'' \cdot \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{2} I_4'' - 10I'' = 20 \\ I'' = -\dfrac{1}{2} I_4'' \end{cases} \Rightarrow I_4'' = 2.67mA$$

$$V_o'' = V_2 - I_4'' R_4 = 17.33V$$

بنابراین:

$$V_o = V_o' + V_o'' = -0.6V + 17.33V = 16.73V$$

مثال ۱–۵ در مدار شکل ۱–۹ ولتاژ خروجی $v_o(t)$ را با فرض $v_1(t) = 6V\sin(1000t)$ و $V_2 = 15V$ بدست آورید.



شکل ۱–۹ مدار مثال ۱–۵

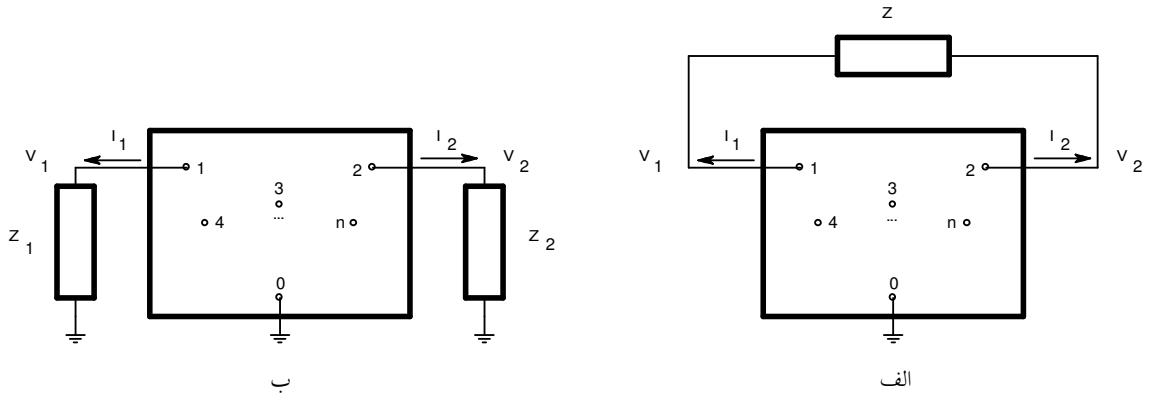
حل: چون این مدار ساده است، به صورت ذهنی و بدون رسم شکل‌های مراحل مختلف، روابط نوشته می‌شوند

$$V_o = \frac{R_2 \| R_3}{R_1 + (R_2 \| R_3)} \cdot V_1 + \frac{R_1 \| R_3}{R_2 + (R_1 \| R_3)} \cdot V_2 = \frac{1}{3} \cdot (V_1 + V_2) = (2\sin(1000t) + 5)V$$

۱-٦-٦ قضیه میلر

در سال ۱۹۱۹ یا ۱۹۲۰ جان میلر[1] در مقاله‌ای قضیه زیر را مطرح کرد، که بنام او *"قضیه میلر"* نامیده می‌شود [6].

هرگاه در یک شبکه چند سر - که یک سر آن زمین شده باشد - یک امپدانس بین دو سر از آن شبکه قرار داشته با شد، می‌توان بجای آن امپدانس دو امپدانس بین هر کدام از سرها و زمین قرار داد. در صورتی که نسبت ولتاژهای بین دو سر و زمین معلوم باشد، مقدار امپدانس‌ها را می توان از رابطه (۱-۳۳) بدست آورد. (شکل ۱-۱۰)



شکل ۱-۱۰ توضیح قضیه میلر: الف- امپدانس شناور بین دو گره ۱ و ۲
ب- تجزیه آن به دو امپدانس بین گره ۱ و زمین؛ و گره ۲ و زمین

$$K = \frac{V_2}{V_1} \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{Z}{1-K}, \quad Z_2 = \frac{K \cdot Z}{K-1} \qquad (۱-۳۳)$$

اثبات قضیه میلر: از شکل ۱-۱۰ الف:

$$Z = \frac{V_1 - V_2}{I_1}, \qquad I_2 = -I_1 \qquad (۱-۳٤)$$

و از شکل ۱-۱۰ ب:

---

[1] John M. Miller

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1}, \qquad Z_2 = \frac{V_2}{I_2} \qquad (۱-۳۵)$$

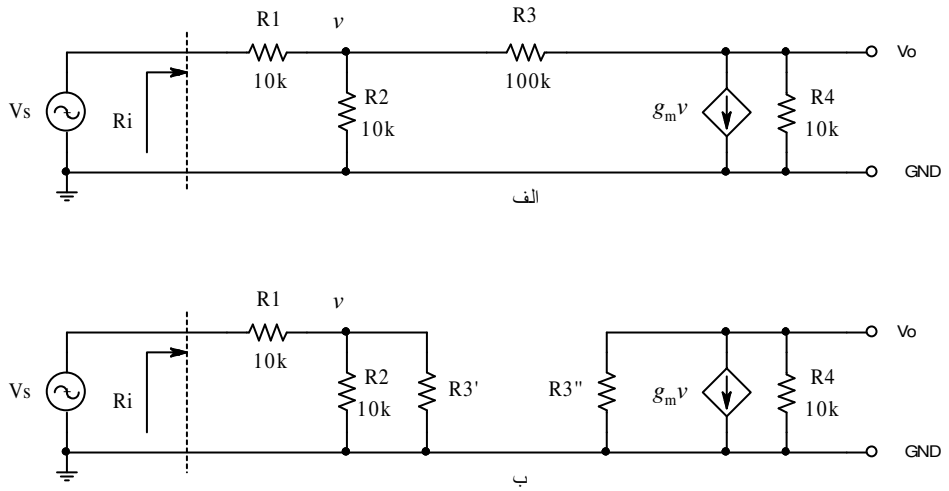
با جانشینی (۱-۳۵) در (۱-۳٤):

$$Z = \frac{V_1 - V_2}{I_1} = \frac{V_1 - K \cdot V_1}{I_1} = Z_1 \cdot (1-K) \quad \Rightarrow \quad Z_1 = \frac{Z}{1-K}$$

و

$$Z = \frac{V_1 - V_2}{I_1} = \frac{V_2 / K - V_2}{-I_2} = Z_2 \cdot (1 - 1/K) \quad \Rightarrow \quad Z_2 = \frac{K \cdot Z}{K-1}$$

مثال ۱-٦ مقاومت ورودی ($R_i \equiv \frac{v_s}{i_s}$) مدار شکل ۱-۱۱ الف را با فرض $g_m = 10mA/V$ بدست



شکل ۱-۱۱ الف- مدار مثال ۱-٦ و ب- تجزیه مقاومت R_3 به دو مقاومت با استفاده از قضیه میلر

آورید.

حل: طبق قضیه میلر می‌توان مقاومت شناور R_3 را با دو مقاومت $R_3^{'}$ و $R_3^{''}$ جانشین کرد به طوری

که:

$$\begin{cases} K = \dfrac{V_o}{v} = -g_m\left(R_4 \| R_3^{''}\right) \\ R_3^{''} = \dfrac{K \cdot R_3}{K-1} \end{cases}$$

و از آنجا با حل سیستم دو معادله و دو مجهول فوق $K = -91$ و $R_3^{''} = 98.913k\Omega$ و با جای‌گذاری در (۱-۳۳)، $R_3^{'} = 1.087k\Omega$ و از شکل ۱-۱۱ ب:

$$R_i = R_1 + \left(R_2 \| R_3^{'}\right) = 10k\Omega + \left(10k\Omega \| 1.087k\Omega\right) = 10.981k\Omega$$

بدست می آید.

تذکر ۱- توصیه اکید می‌شود که مسئله فوق را به کمک قوانین کیرشهف حل کنید.

تذکر ۲- توصیه اکید می‌شود که سیستم دو معادله و دو مجهولی فوق را حل کنید.

تذکر ۳ - چنان که به دو توصیه فوق عمل کنید، مشاهده خواهید کرد که حتی در این مدار ساده - بر خلاف تصور - محاسبات وقت گیر بوده احتمال اشتباه زیاد است. خوشبختانه در مدارهای عملی واقعی، اکثراً اثر مقاومت شناور (در این مثال R_3) در خروجی کم است و حداکثر خودش در خروجی ظاهر می‌شود ($R_3^{''} \approx R_3$، به عبارت دیگر $|K| >> 1$). بنابراین می‌توان از این خاصیت استفاده کرده، جواب را با خطای کم، در زمان کوتاه و امکان اشتباه محاسباتی کم؛ بدست آورد. در عمل همواره - مستقل از این که مقاومت شناور در خروجی چگونه تأثیر کند - خود مقدار آنرا در خروجی در نظر گرفته مسئله را حل می‌کنند. پس از بدست آوردن جواب، چنان که فرض فوق اشتباه بود، یک بار دیگر مسئله را به کمک این جواب حل می‌کنند (روش سعی و خطا[1]). برای مثال مسئله فوق را از این روش حل می‌کنیم:

$$K = \frac{V_o}{v} = -g_m\left(R_4 \| R_3^{''}\right) \approx -g_m\left(R_4 \| R_3\right) = -10mA/V \cdot \left(10k\Omega \| 100k\Omega\right) \approx -90.9$$

[1] آزمون و خطا، Trial and Error

بنابراین خطای محاسباتی[1] $R_3^{''}$ حدوداً ۱٪ است ($\left|E_{rel}(R_3^{''})\right| \approx 1\%$) چرا؟ و از آنجا خطای محاسباتی[2] K و در نتیجه $R_3^{'}$ حدود ۰٫۱٪ بوده (چرا؟) دیگر لزومی به اصلاح جواب نیست. در نتیجه:

$$R_3^{'} = \frac{R_3}{1-k} = \frac{100k\Omega}{1+90.9} \approx 1.088k\Omega$$

$$R_i = R_1 + \left(R_2 \| R_3^{'}\right) = 10k\Omega + \left(10k\Omega \| 1.088k\Omega\right) = 10.981k\Omega \approx 11k\Omega$$

مثال ۱-۷ مثال ۱-٦ را با فرض $g_m = 1mA/V$ و $R_3 = 10k\Omega$ حل کنید.

حل:

$$K = \frac{V_o}{v} = -g_m\left(R_4 \| R_3^{''}\right) \approx -g_m\left(R_4 \| R_3\right) = -1mA/V \cdot \left(10k\Omega \| 10k\Omega\right) = -5$$

بنابراین خطای محاسباتی $\left|E_{rel}(R_3^{''})\right| \approx 20\%$ (چرا؟). و از آنجا $\left|E_{rel}(K)\right| \approx 10\%$ (چرا؟) و لذا مطمئناً $\left|E_{rel}(R_i)\right| < 2\%$ (چرا؟).

$$R_3^{'} = \frac{R_3}{1-k} = \frac{10k\Omega}{1+5} \approx 1.67k\Omega$$

$$R_i = R_1 + \left(R_2 \| R_3^{'}\right) = 10k\Omega + \left(10k\Omega \| 1.67k\Omega\right) = 11.43k\Omega$$

در این مثال نیز خطای محاسباتی کم بوده (خطای واقعی محاسبه مقاومت ورودی کمتر از ۱٪ است!) نیاز به اصلاح جواب‌ها نیست. در صورتی که این دقت کافی نباشد، یک بار دیگر مقدار K را با $R_3^{''}$ بدست آمده، حساب می‌کنیم:

$$R_3^{''} = \frac{K \cdot R_3}{K-1} = \frac{-5 \cdot 10k\Omega}{-5-1} \approx 8.333k\Omega$$

$$K = -g_m\left(R_4 \| R_3^{''}\right) = -1mA/V \cdot \left(10k\Omega \| 8.333k\Omega\right) = -4.546$$

---

[1] مقدار خطای محاسباتی به طور دقیق قابل حصول است (ر. ک. به پیوست ۱-۱)

[2] برای بررسی میزان خطای محاسباتی ترکیب مقاومت‌ها ر. ک. به پیوست ۱-۲

و اگر باز دقت محاسبه K برای ما کافی نباشد:

$$R_3^{''} = \frac{K \cdot R_3}{K-1} = \frac{-4.546 \cdot 10k\Omega}{-4.546-1} \approx 8.197k\Omega$$

$$K = -g_m \left(R_4 \| R_3^{''}\right) = -1mA/V \cdot \left(10k\Omega \| 8.197k\Omega\right) = -4.5046k\Omega$$

و این عمل را می‌توان آن قدر ادامه داد تا به دقت مطلوب دست یافت (جواب نهایی: $K = -4.5$).

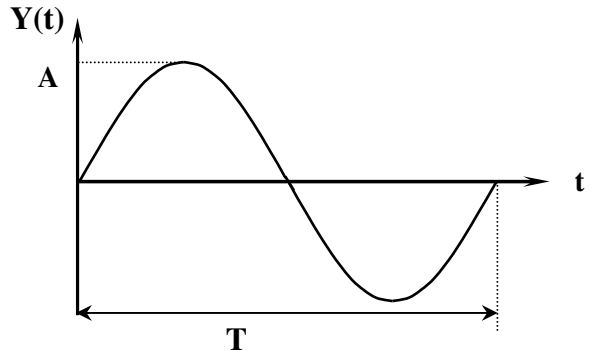
بنابراین اگر مقدار R_i مطلوب باشد، با همان محاسبه اولیه به جواب می‌رسیم و اگر مقدار K مطلوب باشد، جواب مرحله دوم قابل قبول است.

۱-۷ بررسی فرکانسی شبکه‌های الکتریکی

در بخش قبل دیدیم که برای تحیل شبکه‌ها به کمک قوانین ذکر شده (بجز KVL, KCL) منابع باید یا DC باشند یا اگر AC هستند همگی سینوسی و دارای فقط یک فرکانس باشند. ولی در عمل سیگنال‌های واقعی در حالت کلی غیر سینوسی بوده، دارای مولفه‌هایی از فرکانس‌های مختلف هستند. در چنین مواقعی میتوان برای بررسی شبکه‌ها از تبدیل فوریه[1] و دیاگرام بُد[2] استفاده کرد.

۱-۷-۱ طیف فرکانسی

شکل موج‌های ساده را به آسانی می‌توان بر حسب تابعی از زمان نمایش داد برای مثال شکل ۱-۱۲ تابع: $y = A\sin\omega t$ را نمایش میدهد، که در این رابطه: A دامنه، $\omega = 2\pi f$، $f = \frac{1}{T}$ فرکانس و T پریود[3] سیگنال می‌باشد.



شکل ۱-۱۲ نمایش یک سیگنال سینوسی بر حسب زمان

نمایش یک تابع برحسب زمان را اصطلاحاً نمایش آن در میدان زمان[4] گویند.

اگر فرضاً سیگنالی داشته باشیم که از مجموعه‌ای از سیگنالهای سینوسی تشکیل شده باشد، مثلاً:

$$y(t) = A_1 \sin\omega_1 t + A_2 \sin\omega_2 t + \cdots + A_n \sin\omega_n t$$

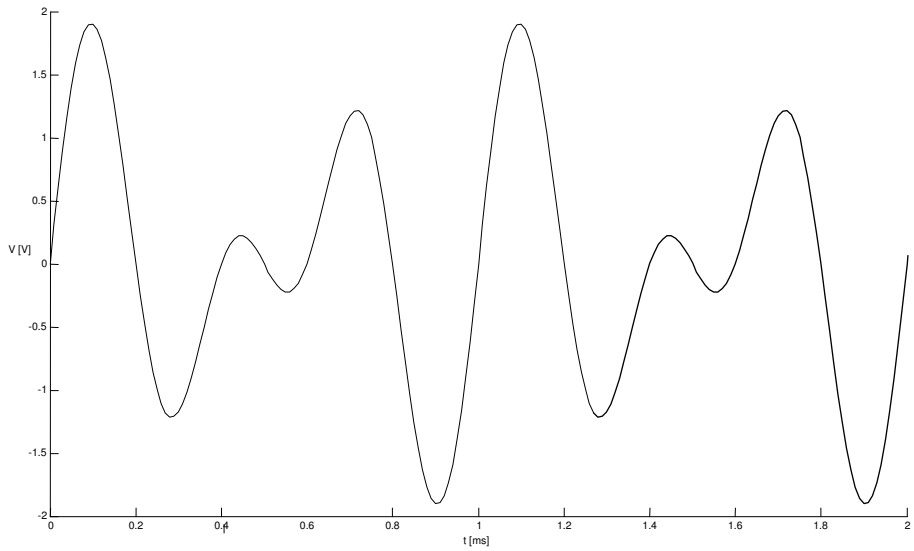
دیگر این تابع براحتی قابل نمایش و بررسی نمی باشد، برای مثال سیگنال نسبتاً ساده‌ی:

---

[1] Jean Baptiste Joseph Fourier
[2] Handrik Wade Bode
[3] Period, زمان تناوب
[4] Time-Domain, حوزه زمان

$$y = \sin 2\omega t + \sin 3\omega t$$

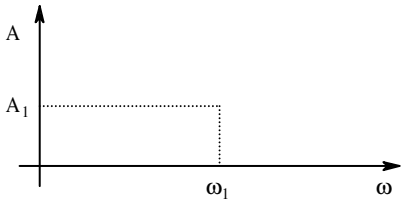
در شکل ۱-۱۳ نمایش داده شده است.



شکل ۱-۱۳ یک سیگنال ترکیبی، متشکل از دو سینوسی با دامنه های مساوی و فرکانسهای ۲:۳

به همین دلیل در بعضی مواقع ساده‌تر خواهد بود که روش دیگری برای نمایش سیگنال‌های مختلط پیدا کرد. اگر توجه کنیم که تابع $y = A_1 \sin \omega_1 t$ با دو پارامتر دامنه (A_1) و فرکانس ($\omega_1 = 2\pi f_1$) مشخص می‌شود[1]، این تابع را میتوان بر حسب فرکانس نیز نمایش داد.

این نحوه نمایش سیگنال را، نمایش در میدان فرکانس[2] گویند (شکل ۱-۱٤). لذا نمایش یک سیگنال سینوسی در حوزه زمان، متناظر است با یک "نقطه" در حوزه فرکانس! طبیعتاً نمایش یک نقطه به مراتب ساده‌تر از نمایش یک سینوسی است!

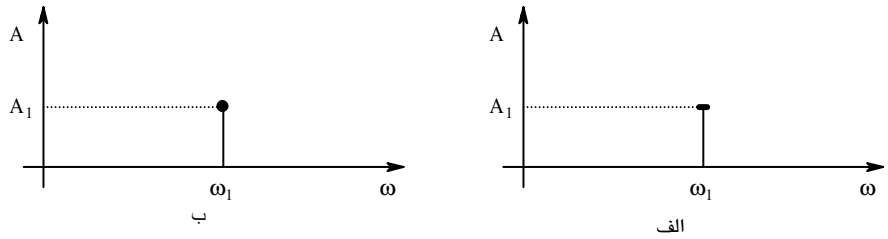


شکل ۱-۱٤ نمایش یک سیگنال سینوسی در حوزه فرکانس

[1] فعلاً برای سادگی از فاز صرفنظر می‌کنیم. در عمل مطالبی که برای دامنه گفته می‌شود، برای فاز نیز به طور مشابه قابل استفاده است.

[2] حوزه فرکانسی, Frequency Domain

در عمل اکثراً برای این که نقطه در صفحه به خوبی قابل رؤیت نیست، این نقطه را مانند شکل ۱-۱۵ الف توسط محل برخورد دو قطعه خط نمایش میدهند گاهی اوقات نیز یک خط و یک دایره برای این منظور به کار گرفته میشود (شکل ۱-۱۵ ب).



شکل ۱-۱۵ نحوه دیگر نمایش یک سیگنال سینوسی در حوزه فرکانس

تذکر: به وسیله اندازه‌گیری که سیگنال‌ها را در میدان زمان نمایش میدهد، اسیلوسکپ[1] و به دستگاهی که سیگنال‌ها را در میدان فرکانس نمایش میدهد، اسپکتروم‌آنالیزر[2] گویند.

یک ریاضی‌دان فرانسوی بنام فوریه[3] ثابت کرد که هر سیگنال را می توان از میدان زمان به میدان فرکانس منتقل نمود و بلعکس [7]. انتقال سیگنال از حوزه زمان به حوزه فرکانس، تبدیل فوریه[4] و انتقال سیگنال از میدان فرکانس به میدان زمان، عکس تبدیل فوریه[5] نامیده میشود.

اگر سیگنال در میدان زمان پریودیک باشد، در میدان فرکانس گسسته است و اگر در میدان زمان غیرپریودیک باشد، در میدان فرکانس پیوسته است.

سیگنالهای پریودیک توسط سری فوریه و سیگنالهای غیر پریودیک بکمک انتگرال فوریه[6] قابل انتقال به میدان فرکانس هستند. به مجموعه مؤلفه‌های سیگنال در میدان فرکانس، طیف[1] فرکانسی

---

[1] نوسان‌نگار ,Oscilloscope

[2] طیف‌نگار ,Spectrum-Analyzer

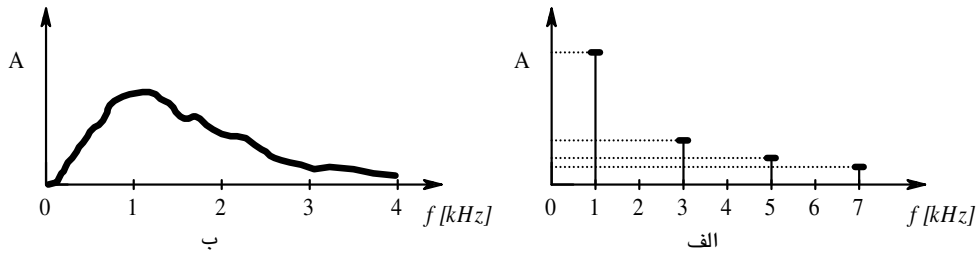
[3] Jean Baptiste Joseph Fourier

[4] FT: Fourier Transform

[5] IFT: Inverse Fourier Transform

[6] ر. ک. به دروس ریاضی و اخبار سیستم

سیگنال گویند. شکل ۱-۱۶ طیف فرکانسی یک موج مربعی (پریودیک) و طیف فرکانسی صوت انسان (غیر پریودیک) را نمایش میدهد.



شکل ۱-۱۶ طیف فرکانسی: الف- سیگنال مربعی با فرکانس $1kHz$ ب- صوت انسان

یک موج مربعی متقارن با دامنه A از رابطه (۱-۳۶)، یک موج مثلثی متقارن از رابطه (۱-۳۷) و یک موج دندانه‌اره‌ای از رابطه (۱-۳۸) قابل محاسبه[2] است.

$$y=\frac{4A}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+...\right)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left((2n-1)x\right) \qquad (۱-۳۶)$$

$$y=\frac{8A}{\pi^2}\left(\sin x-\frac{1}{9}\sin 3x+\frac{1}{25}\sin 5x+...\right)=\frac{8A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\left((2n-1)x\right) \qquad (۱-۳۷)$$

$$y=\frac{2A}{\pi}\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+...\right)=\frac{-2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(nx\right) \qquad (۱-۳۸)$$

در این روابط n عدد صحیح، $x=\omega\cdot t$، $\omega=2\cdot\pi\cdot f$، f فرکانس و A دامنه سیگنال می‌باشد. علامت منفی مبین ۱۸۰° اختلاف فاز است.

مثال: یک موج مربعی متقارن با فرکانس $f=1kHz$ و دامنه $A=1V$ دارای مؤلفه های: 1kHz با دامنه 12.73V، 3kHz با دامنه 4.42V، 5kHz با دامنه 2.55V، ... است.

---

[1] Spectrum

[2] برای اطلاع از نحوه محاسبه ضرایب فوریه برای هر سیگنال پریودیک دلخواه به درس ریاضیات مهندسی رجوع کنید.

حال با توجه به مطالب مذکور؛ چنان که در یک شبکه خطی، چند منبع سینوسی بـا فرکـانس‌هـای مختلف، یا یک منبع پریودیک غیر سینوسی وجود داشته باشد، می‌توان – به کمک سری فوریه – بجای آن منبع، چند منبع سینوسی را در نظر گرفته، طبق اصل جمع آثار پاسخ سیستم را به تک تک سیگنال‌ها بدست آورده، آنها را باهم جمع کرده، جواب نهایی را به کمک عکس تبـدیل فوریـه، در میـدان زمـان بدست آورد.

۱-۷-۲ پاسخ فرکانسی

مفهوم پاسخ فرکانسی عبارت است از وابستگی نسبت سیگنال خروجی به سیگنال ورودی یک سیستم به فرکانس:

$$A(\omega) = \frac{s_o(\omega)}{s_i(\omega)} \qquad \text{(۱-۳۹ الف)}$$

به عبارت دیگر:

$$A(f) = \frac{s_o(f)}{s_i(f)} \qquad \text{(۱-۳۹ ب)}$$

که در این روابط: سیگنال‌ها سینوسی، A تـابع تبـدیل، s_i سـیگنال ورودی، s_o سـیگنال خروجـی، $\omega=2\pi f$ و f فرکانس سیگنال ورودی می‌باشند. توجه شود که پاسخ فرکانسی فقط برای سیستم‌هـای خطی تعریف می‌شود؛ بنابراین فرکانس خروجی همواره با فرکانس ورودی برابر است (چرا؟).

به علت این که تغییر فرکانس هم باعث تغییر دامنه و هم باعث تغییر فاز می‌شود، بـرای مـشخص کردن پاسخ فرکانسی دو نمودار در نظر گرفته می‌شود؛ یک نمودار که وابستگی تغییرات دامنه برحسب فرکانس را نشان می‌دهد (پاسخ دامنه به فرکانس)،

$$|A(\omega)| = \left|\frac{s_o(\omega)}{s_i(\omega)}\right| \qquad (۱-۴۰ \text{ الف})$$

و نمودار دیگر که وابستگی تغییرات فاز برحسب فرکانس را نشان می‌دهد (پاسخ فاز به فرکانس).

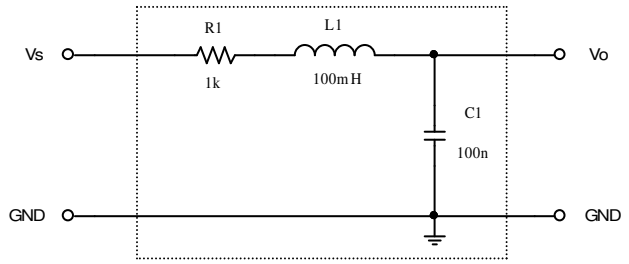
$$\angle A(\omega) = \angle\frac{s_o(\omega)}{s_i(\omega)} = \angle s_o(\omega) - \angle s_i(\omega) \qquad (۱-۴۰ \text{ ب})$$

در صورت لزوم برای اطلاع از چگونگی رسم پاسخ فرکانسی به پیوست ۱-۳ مراجعه کنید.

۱-۷-۳ نمودار بُد

از اولین کسانی که از نمودار پاسخ فرکانسی جهت مطالعه رفتار سیستم‌ها استفاده کردند بُد[1] بود. او محور فرکانس را لگاریتمی، محور فاز را خطی و محور دامنه را برحسب دسی‌بل[2] مدرج نمود. به افتخار وی معمولاً نمودار پاسخ فرکانسی را دیاگرام بُد[3] نامند.

مثال ۱-۸ نمودار بُد مدار شکل ۱-۱۷ در شکل ۱-۱۸ نمایش داده شده است. چنان که ملاحظه می‌شود محدوده فرکانسی از ده هرتز تا صد کیلو هرتز است. اصطلاحاً به نسبت فرکانسی ده به یک، یک دهه[4] گویند. گاهی اوقات نیز نسبت فرکانسی دو بر یک را در نظر می‌گیرند، که به آن یک اکتاو[5] گویند.



شکل ۱-۱۷ مدار مثال ۱-۸

---

[1] Handrik Wade Bode

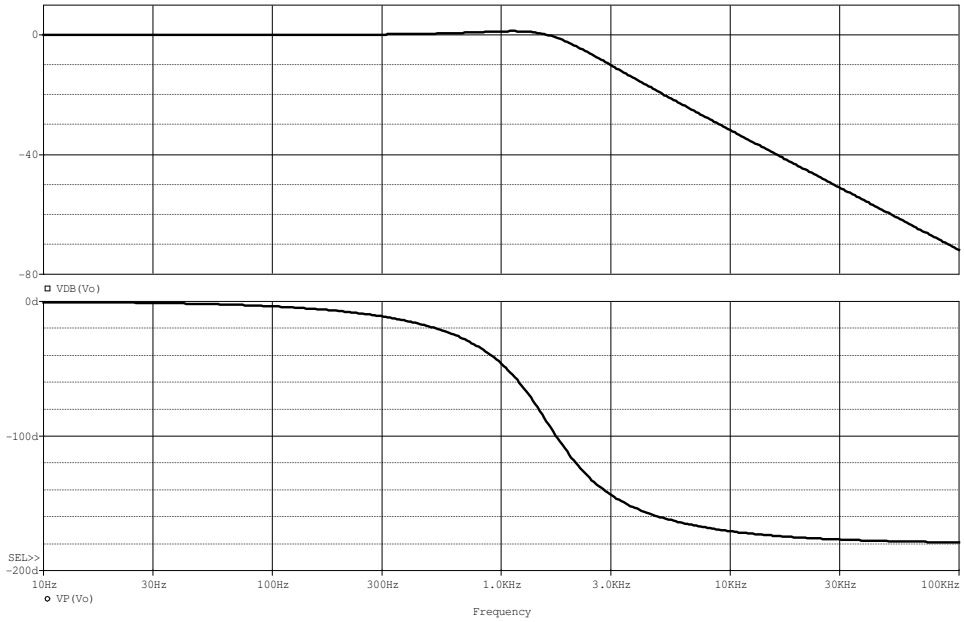
[2] ر. ک. به پیوست ۱-۴

[3] Bode-Diagram, Bode-Chart, Bode-Plot

[4] دکاد، Decade

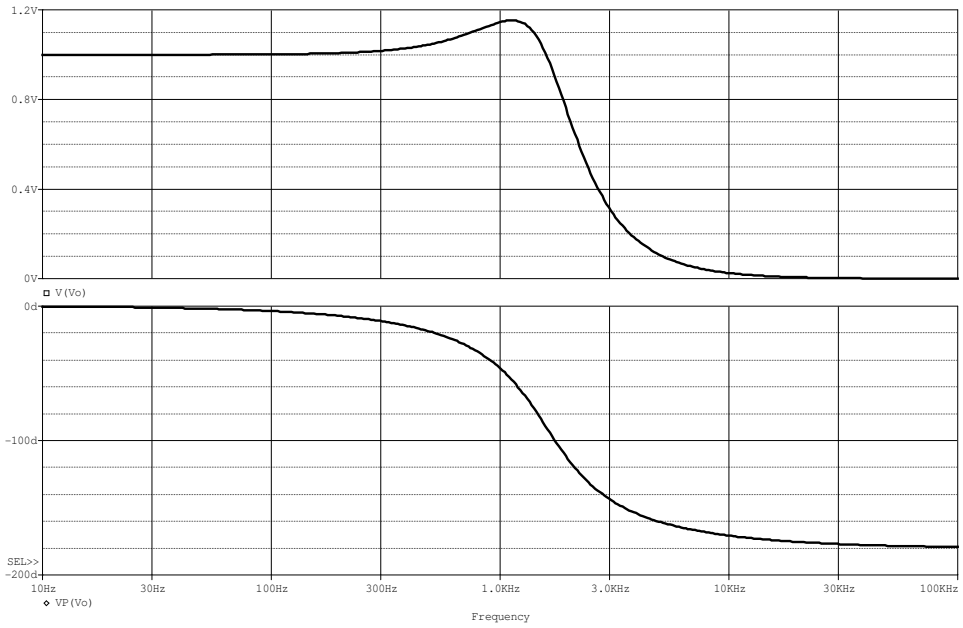
[5] Octave

چنان که در شکل ۱–۱۸ مشاهده می‌شود، روند تغییرات پاسخ فرکانسی در یک محدوده وسیع فرکانسی (نسبت ۱۰۰۰۰ به ۱، ٤ دهه) و محدوده وسیع دامنه (بیش از ۷۰ دسی بل، نسبت ۳۰۰۰ به ۱) قابل رویت است.



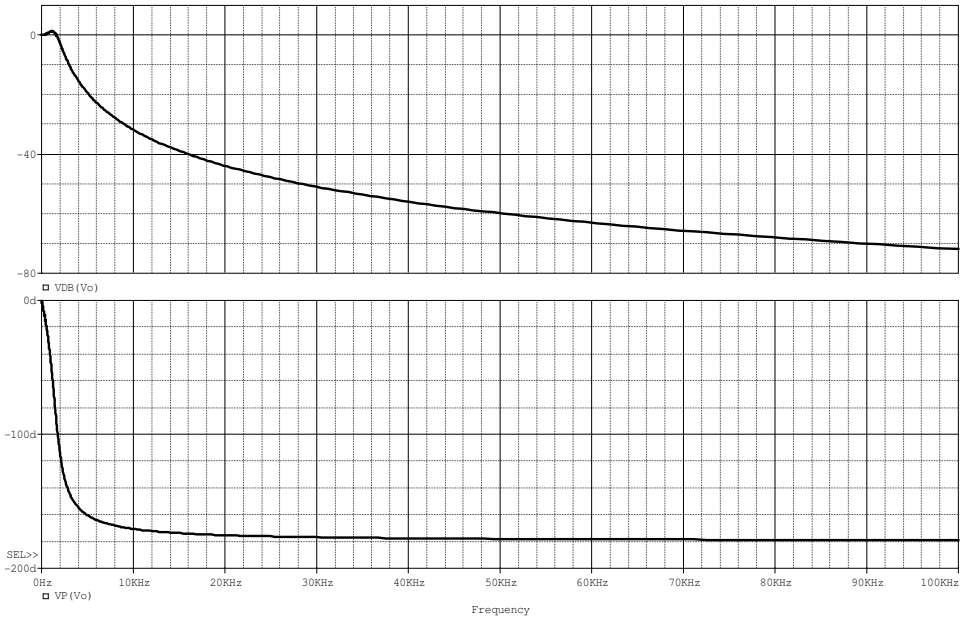
شکل ۱–۱۸ نمودار بد مربوط به مدار شکل ۱–۱۷ (محدوده فرکانسی، ٤ دهه، دامنه برحسب دسی‌بل)

در شکل ۱–۱۹ نیز فرکانس به صورت لگاریتمی، ولی دامنه خطی نمایش داده شده است. در این نمودار، برخلاف نمودار شکل ۱–۱۸، تغییرات نسبتاً کم دامنه در فرکانس‌های حدود یک کیلو هرتز به خوبی قابل مشاهده است ولی در عوض تغییرات دامنه در فرکانس‌های بالای ده کیلو هرتز قابل تشخیص نمی‌باشد.

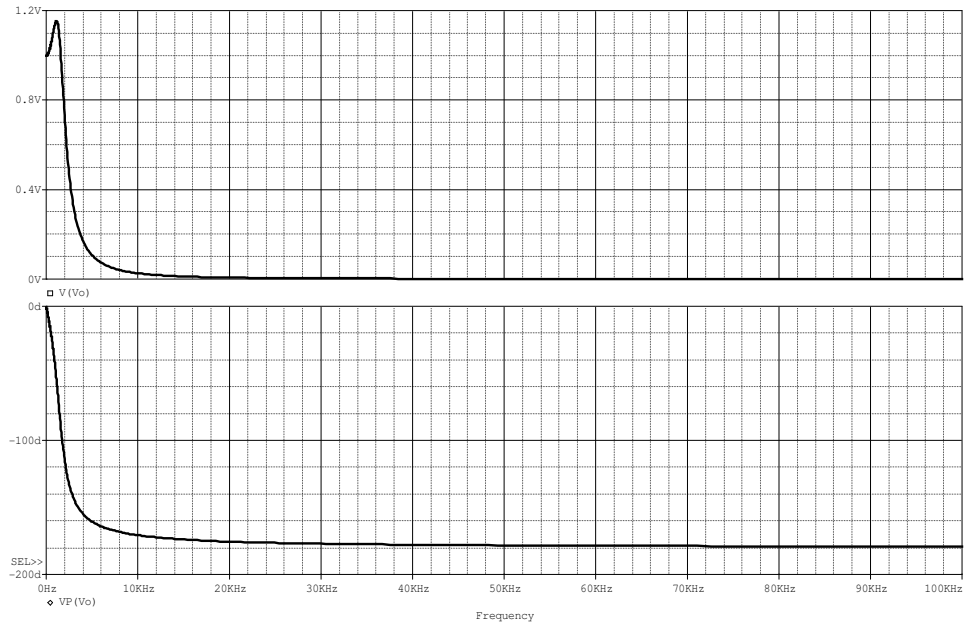


شکل ۱-۱۹ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۱۷، فرکانس لگاریتمی، دامنه خطی

بالاخره در شکل‌های ۱-۲۰ و ۱-۲۱ دو حالت باقی مانده نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱-۲۰ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۱۷، فرکانس خطی، دامنه لگاریتمی



شکل ۱-۲۱ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۱۷، فرکانس و دامنه هر دو خطی

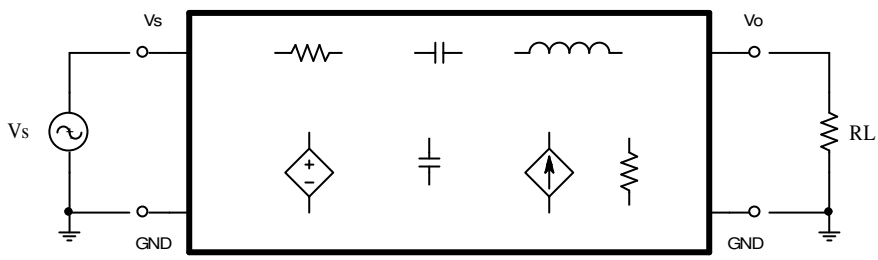
همان طور که از این شکل‌ها بر می‌آید، در بیشتر مواقع نمودار لگاریتمی - لگاریتمی برای دامنـه و نمودار لگاریتمی - خطی برای فاز، بهترین نتیجه را می‌دهد.

۱-۷-٤ نحوه محاسبه پاسخ فرکانسی

در بخش‌های قبل با مفهوم پاسخ فرکانسی و نحوه اندازه‌گیری و رسم نمودارهای مربوطه آشنا شدیم. حال می‌خواهیم با نحوه محاسبه پاسخ فرکانسی آشنا شویم. شکل ۱-۲۲ حالت کلی یک چهار قطبی را نمایش می‌دهد. تحریک (در این شکل V_s) یک منبع ولتاژ یا منبع جریان سینوسی است که فرکانس آن در محدوده‌ای از f_1 تا f_2 تغییر می‌کند. پاسخ (در این شکل V_o) ولتاژ دو سر مقاومت بار (در این شکل R_L) یا جریان گذرنده از آن است. در هر لحظه، فرکانس پاسخ با فرکانس تحریک برابر

است (چرا؟). به نسبت پاسخ به تحریک "*تابع تبدیل*[1]" گویند. بنا بر این برای این شکل پاسخ فرکانسی طبق رابطه (۱-۳۹ الف):

$$T(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} \qquad (۱-٤۱)$$



شکل ۱-۲۲ فرم کلی یک شبکه خطی

تذکر: تابع تبدیل یک مفهوم عام است. در این درس چون بیشتر با تقویت کننده‌ها سر و کار داریم، اغلب بجای لفظ "تابع تبدیل" از لغت "تقویت[2]" استفاده می شود (هر چند که سیستم مورد نظر تقویت کننده هم نباشد!). در عمل هم مهندسین در اندازه گیری‌ها - و در نتیجه برای محاسبات - اغلب بجای ω، $f=\frac{\omega}{2\pi}$ را به کار می‌برند. برای سادگی در نگارش، حتی گاهی از نوشتن "j" نیز صرفنظر می‌شود.

$$A(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)} \qquad (۱-٤۱ \text{ الف})$$

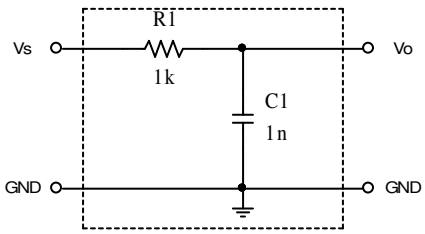
$$A(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)} \qquad (۱-٤۱ \text{ ب})$$

$$A(f)=\frac{V_o(f)}{V_s(f)} \qquad (۱-٤۱ \text{ ج})$$

T: Transfer Function [1]
A: Amplification [2]

راه حل کلی برای محاسبه پاسخ فرکانسی، استفاده از همان روابط مداری است، که با آنها آشنا شده‌اید. در اینجا با یک مثال ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۱-۹ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۲۳ را محاسبه و رسم کنید.



شکل ۱-۲۳ مدار مثال ۱-۹

حل: برای سادگی در نگارش $R1 = R$ و $C1 = C$ در نظر گرفته می‌شود. در این شکل منبع سیگنال نمایش داده نشده است، ولی با توجه به نمایش v_s در گره ورودی، نتیجه می‌گیریم که منبع سیگنال یک منبع ولتاژ است که بین دو گره v_s و GND قرار گرفته است. خروجی مدار هم افت ولتاژ بین دو گره v_o و GND می‌باشد. در این مدار $R_L \to \infty$. داریم:

$$A(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR} \qquad (۱-۴۲)$$

برای سادگی در نوشتن روابط می‌توان از مجهول معاون‌های زیر استفاده کرد:

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad (۱-۴۳)$$

در نتیجه:

$$A(\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega} = \frac{1 - j\Omega}{1 + \Omega^2} \qquad (۱-۴۴)$$

و از آن جا:

$$|A(\Omega)| = A = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2}}, \qquad \angle A(\Omega) = \varphi = -\arctan \Omega \qquad (۱-۴۵)$$

برای رسم نمودارهای دامنه و فاز - مانند روش‌های متداول ریاضی - از مجانب‌ها و نقاط کمکی استفاده می‌کنیم. برای این منظور: $\Omega << 1$ و $\Omega >> 1$ دو مجانب و $\Omega = 1$ یک نقطه کمکی خواهند بود.

برای رسم دقیقتر، می‌توان از نقاط کمکی دیگر نظیر $\Omega = 2, \Omega = 1/2, \cdots$ استفاده کرد، که در حالت کلی لازم نیست. برای دامنه:

$$A = \begin{cases} 1 & \equiv & 0dB & for & \Omega << 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \equiv & -3dB & for & \Omega = 1 \\ \dfrac{1}{\Omega} & \equiv & -20dB/dec & for & \Omega >> 1 \end{cases}$$

و برای فاز:

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \equiv & 0° & for & \Omega << 1 \\ -\dfrac{\pi}{4} & \equiv & -45° & for & \Omega = 1 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \equiv & -90° & for & \Omega >> 1 \end{cases}$$

بنا بر این پاسخ فرکانسی نرمالیزه[1] به صورت شکل ۱-۲٤ رسم می‌شود.

چنان که مشاهده می‌شود، برای فرکانس‌های پایین ولتاژ خروجی با ورودی برابر است ولی برای فرکانس‌های بالا سیگنال خروجی تضعیف می‌شود. به همین علت به این مدار یک پایین گذر[2] گویند. به ازای $\Omega = 1$ بهره ولتاژ مدار به اندازه $A = \sqrt{2}/2 \approx 0.7$ کاهش پیدا کرده است. به عبارت دیگر توان خروجی به اندازه نصف مقدار حداکثر خود رسیده است. به همین دلیل به فرکانس متناظر با آن:

$$\Omega = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega_0, \quad f = f_0 \qquad (٤٦-١)$$

فرکانس نیمه توان[3] و اغلب فرکانس حد[4] گویند و در نشریات مختلف آن را با: f_0، f_{-3dB}، f_γ، f_g یا f_c نمایش می‌دهند. تعریف فرکانس حد برای سایر سیستم‌ها نیز چنین است. برای مدار پایین

---

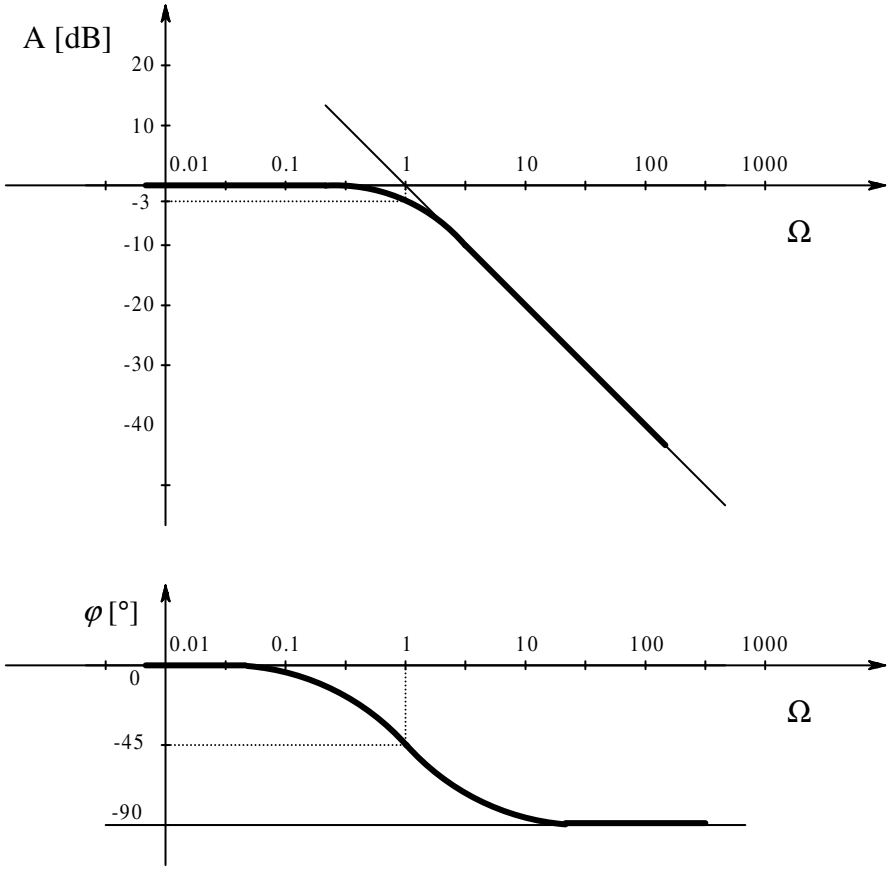
[1] هنجار شده، Normalized

[2] LP: Low Pass

[3] Half-Power Frequency

[4] فرکانس قطع، Corner-Frequency, Cutoff-Frequency

گذر، چون بالاترین فرکانسی که مدار هنوز کار خود را در حد قابل قبول انجام می‌دهد، فرکانس حد آن است، اغلب به آن فرکانس حد بالایی گفته، آن را با f_h [1]، نمایش می‌دهند.



شکل ۱-۲٤ پاسخ فرکانسی نرمالیزه شده مدار شکل ۱-۲۳ بالا: دامنه پایین: فاز

از مطالب فوق جواب مسئله به این صورت در می‌آید:

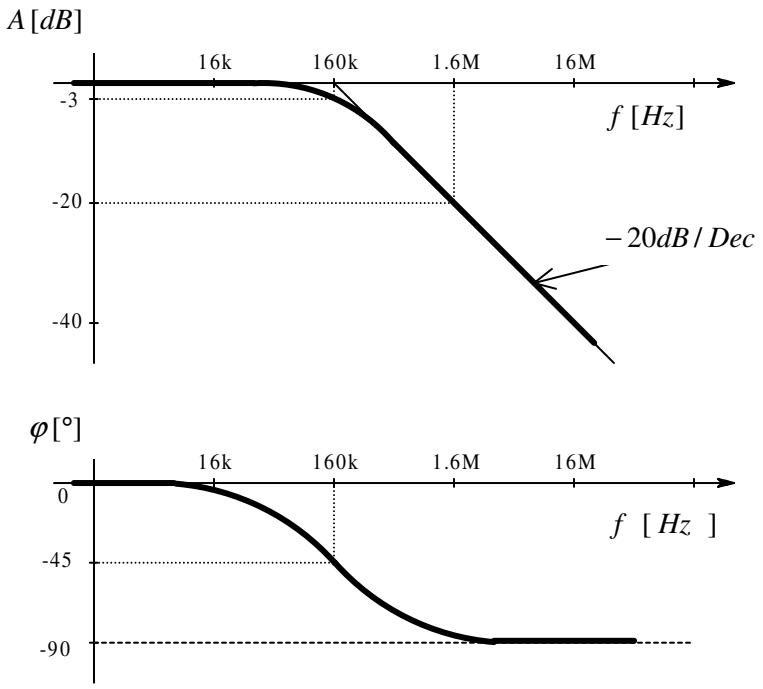
$$f_h = \frac{\omega_h}{2\pi} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot R_1\cdot C_1} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 1k\Omega\cdot 1nF} \approx 160kHz$$

پاسخ فرکانسی واقعی مدار شکل ۱-۲۳ در شکل ۱-۲۵ نمایش داده شده است.

مطالب ذکر شده کلی هستند. به این معنی که هر مداری که تابع تبدیل آن فرم رابطه (۱-٤٤) را داشته باشد، یک مدار پایین گذر درجه یک بوده، در فرکانس پایین بهره آن $A(f << f_h) = 0dB$، به ازای فرکانس طبیعی شبکه، $A(f = f_h) = -3dB$ و در فرکانس‌های بالا با شیب ثابت

[1] Higher Frequency

$A(f >> f_h) = -20dB/dec$ افت می کند. با علم بر این مسایل، دیگر لازم نیست هر بار که با چنین مسئله‌ای بر خوردیم آنرا حل کنیم. بلکه اگر تشخیص دادیم که شبکه یک پایین گذر درجه اول است، کافی است که فرکانس طبیعی به عبارت دیگر ثابت زمانی آن را بدست آورده، در فرم شکل ۱-۲٤ به عبارت دیگر شکل ۱-۲۵ جایگزین کنیم.

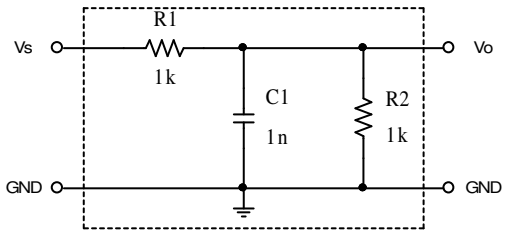


شکل ۱-۲۵ نمودار بد مدار شکل ۱-۲۳

مثال ۱-۱۰ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۲٦ را رسم کنید.

حل: اگر مدار معادل تونن را نسبت به خازن در نظر بگیریم، همان مدار شکل ۱-۲۳ بدست می‌آید.

در این مدار:

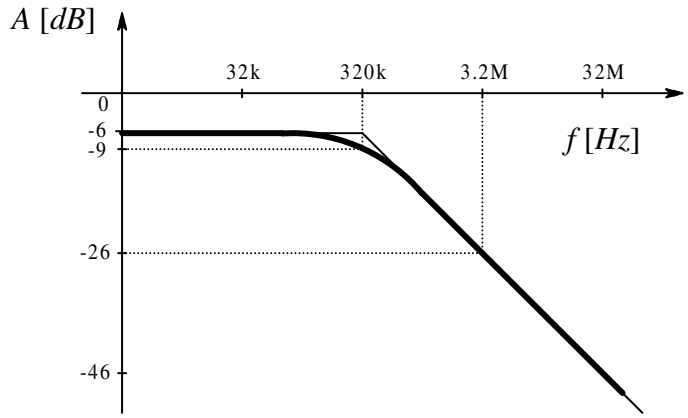


شکل ۱-۲٦ مدار مثال ۱۰

$$V_O = V_{Th} = \frac{R2}{R1+R2}\cdot V_S = \frac{1}{2}V_S \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{Th}}{V_S} = \frac{1}{2} \equiv -6dB$$

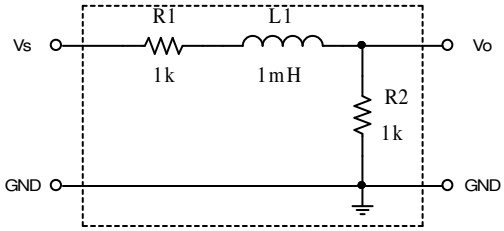
$$R = R_{Th} = R1 \| R2 = 500\Omega,\ C = C1 = 1nF \Rightarrow \tau = RC = 500ns \Rightarrow f_h = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 320kHz$$

با توجه به این که تقسیم ولتاژ بین $R2$ و $R1$ تاثیری در فرم پاسخ فرکانسی فاز ندارد، از تکرار آن صرفنظر کرده در شکل ۱–۲۷ فقط پاسخ دامنه رسم شده است.



شکل ۱–۲۷ پاسخ فرکانسی (دامنه) مدار شکل ۱–۲۶

مثال ۱–۱۱ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱–۲۸ را بدست آورید.



شکل ۱–۲۸ مدار مثال ۱–۱۱

حل: چنان که این مدار را نیز (مانند مثال ۱–۹) به روش تحلیلی حل کنیم به همان معادله (۱–٤٤) به عبارت دیگر (۱–٤٥) می‌رسیم. با این تفاوت که بجای $\tau_C = R\cdot C$ باید $\tau_L = L/R$ را قرار داد. با استفاده از روش ذهنی می‌توان چنین استدلال کرد: سلف در فرکانس‌های پایین مانند اتصال کوتاه و در فرکانس‌های بالا مانند اتصال باز عمل می کند، لذا مدار یک پایین گذر است و چون فقط دارای یک

عنصر ذخیره کننده انرژی (سلف) است پس مدار درجه یک بوده پاسخ فرکانسی آن از رابطه (۱-٤٤) قابل محاسبه است. برای این مدار:

$$V_O = V_{Th} = \frac{R2}{R1+R2}\cdot V_S = \frac{1}{2}V_S \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{Th}}{V_S} = \frac{1}{2} \equiv -6dB$$

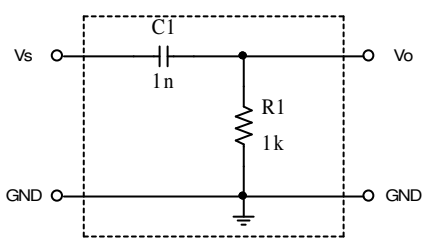
$$R = R1 + R2 = 2k\Omega,\ L = L1 = 1mH \Rightarrow \tau = L/R = 500ns \Rightarrow f_h = \frac{1}{2\pi\tau} \approx 320kHz$$

چون اتفاقاً در این مثال مقادیر بدست آمده با مقادیر مثال قبل یکی در آمد، پاسخ فرکانسی مدار دقیقاً مانند شکل ۱-۲۷ بوده از تکرار رسم نمودار خودداری شده است.

تمرین: مثال ۱-۱۱ را به روش تحلیلی حل کنید.

مثال ۱-۱۲ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۲۹ را محاسبه و رسم کنید.

حل: برای سادگی در نگارش $R1 = R$ و $C1 = C$ در نظر گرفته می‌شود. در این شکل منبع سیگنال نمایش داده نشده است، ولی با توجه به نمایش v_s در گره ورودی، نتیجه می‌گیریم که منبع سیگنال یک منبع ولتاژ است که بین دو گره v_s و GND قرار گرفته است. خروجی مدار هم افت ولتاژ بین دو گره v_o و GND می‌باشد.



شکل ۱-۲۹ مدار مثال ۱-۱۲

با توجه به رابطه تقسیم ولتاژ داریم:

$$A(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega CR} \qquad (۱-٤٧)$$

در اینجا نیز برای سادگی در نوشتن روابط از مجهول معاون‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}, \qquad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad (۱-٤٨)$$

در نتیجه:

$$A(\Omega)=\frac{j\Omega}{1+j\Omega}=\frac{j\Omega\cdot(1-j\Omega)}{1+\Omega^2} \qquad (۱-۴۹)$$

و از آن جا:

$$|A(\Omega)|=A=\frac{\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}}, \qquad \angle A(\Omega)=\varphi=+\arctan\Omega \qquad (۱-۵۰)$$

برای رسم نمودارهای دامنه و فاز، مانند مثال ۱-۹، دو مجانب در حالت $\Omega<<1$ و $\Omega>>1$ و نقطه کمکی $\Omega=1$ خواهند بود. برای دامنه:

$$A=\begin{cases} \Omega \equiv +20dB/dec & for \quad \Omega<<1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \equiv -3dB & for \quad \Omega=1 \\ 1 \equiv 0dB & for \quad \Omega>>1 \end{cases}$$

و برای فاز:

$$\varphi=\begin{cases} +\frac{\pi}{2} \equiv +90^\circ & for \quad \Omega<<1 \\ +\frac{\pi}{4} \equiv +45^\circ & for \quad \Omega=1 \\ 0 \equiv 0^\circ & for \quad \Omega>>1 \end{cases}$$

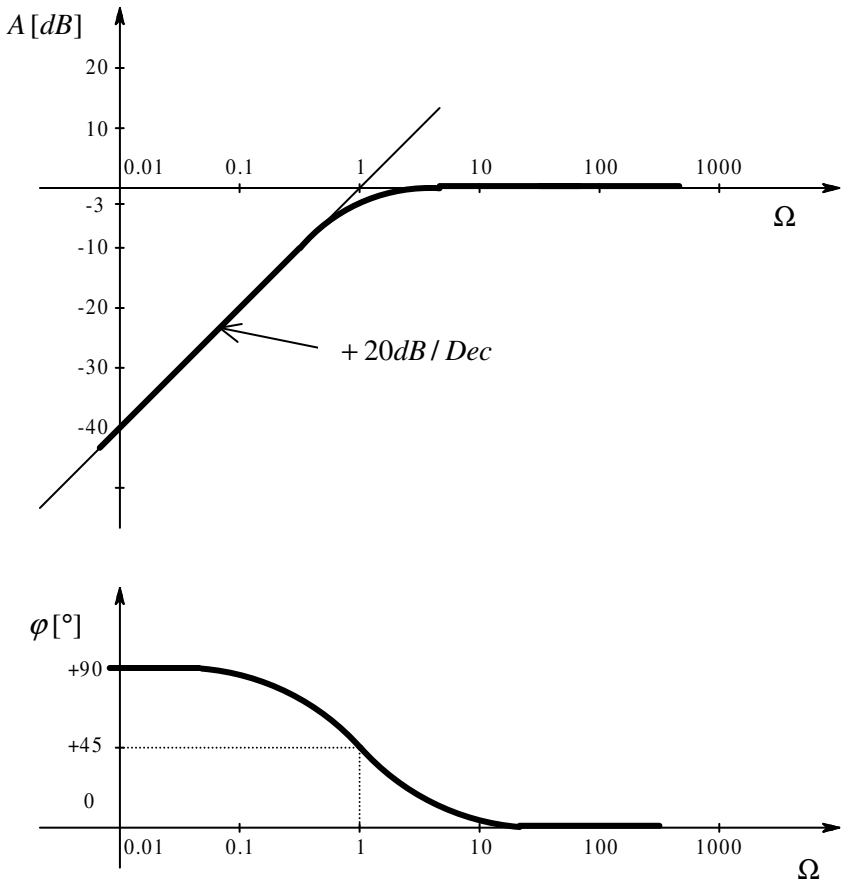
بنا بر این پاسخ فرکانسی نرمالیزه به صورت شکل ۱-۳۰ رسم می‌شود.

چنان که مشاهده می‌شود، برای فرکانس‌های بالا ولتاژ خروجی با ورودی برابر است ولی برای فرکانس‌های پایین سیگنال خروجی تضعیف می‌شود. به همین علت به این مدار یک بالا گذر[1] گویند. در این مدار نیز به ازای $\Omega=1$ بهره ولتاژ مدار به اندازه $A=\sqrt{2}/2\approx 0.7$ کاهش پیدا کرده است. به همین دلیل به فرکانس متناظر با آن:

$$\Omega=1, \qquad \Rightarrow \qquad \omega=\omega_0, \quad f=f_0$$

[1] HP: High Pass

فرکانس حد گویند که در مدار بالا گذر، چون پایین‌ترین فرکانسی که مدار هنوز کار خود را در حد قابل قبول انجام می‌دهد، فرکانس حد آن است، اغلب به آن فرکانس حد پایینی گفته، آن را با f_l [1]، نمایش می‌دهند.



شکل ۱-۳۰ پاسخ فرکانسی نرمال شده مدار بالا گذر درجه اول

نمودار بالا: پاسخ دامنه، نمودار پایین: پاسخ فاز.

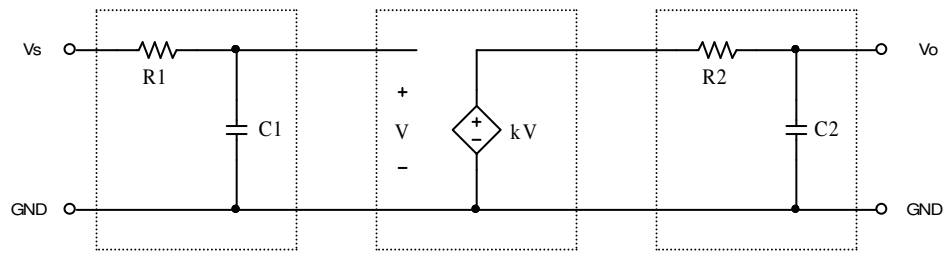
بنا بر این فرکانس حد این مدار:

$$f_l = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1k\Omega \cdot 1nF} \approx 160kHz$$

است. (به علت بدیهی بودن شکل پاسخ فرکانسی از رسم مجدد آن صرفنظر شده است).

[1] Lower Frequency

مثال ۱-۱۳ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۳۱ را رسم نمایید.



شکل ۱-۳۱ مدار مثال ۱-۱۳

حل: مدار از سه بخش تشکیل شده است: پایین گذر $R1C1$، منبع وابسته به ولتاژ با بهره k و پایین گذر $R2C2$. بنابر این پاسخ فرکانسی مجموعه از (۱-۵۱) قابل محاسبه است.

$$A(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}=\frac{1}{1+j\omega C2R2}\cdot k\cdot\frac{1}{1+j\omega C1R1} \qquad (۱-۵۱)$$

در این مسئله نیز اگر $R1C1=1/\omega_0$ و $R2C2=\alpha/\omega_0$ و $\Omega=\omega/\omega_0$ در نظر گرفته شوند:

$$A(\Omega)=\frac{k}{(1+\alpha j\Omega)\cdot(1+j\Omega)} \qquad (۱-۵۲)$$

که این رابطه یک معادله درجه دوم بر حسب Ω به عبارت دیگر ω است. به همین دلیل به این مدار یک مدار RC پایین گذر درجه دوم[1] گویند. طبیعتاً راه حل کلی بدست آوردن پاسخ فرکانسی به عبارت دیگر فرکانس حد مدار، حل و رسم نمودار معادله (۱-۵۲) است[2]. در تقریباً تمام مدارهایی که به عنوان تقویت کننده‌های باند پهن[3]، که موضوع اصلی این درس است؛ $\alpha<<1$ بوده، بجای (۱-۵۲) می‌توان از (۱-۵۳) استفاده کرد.

$$A(\Omega)\approx\frac{k}{(1+j\Omega)} \qquad (۱-۵۳)$$

---

[1] 2.O. RC-LP: Second Order RC- Low Pass

[2] ر. ک. پیوست ۱-۵

[3] Wide Band Amplifier

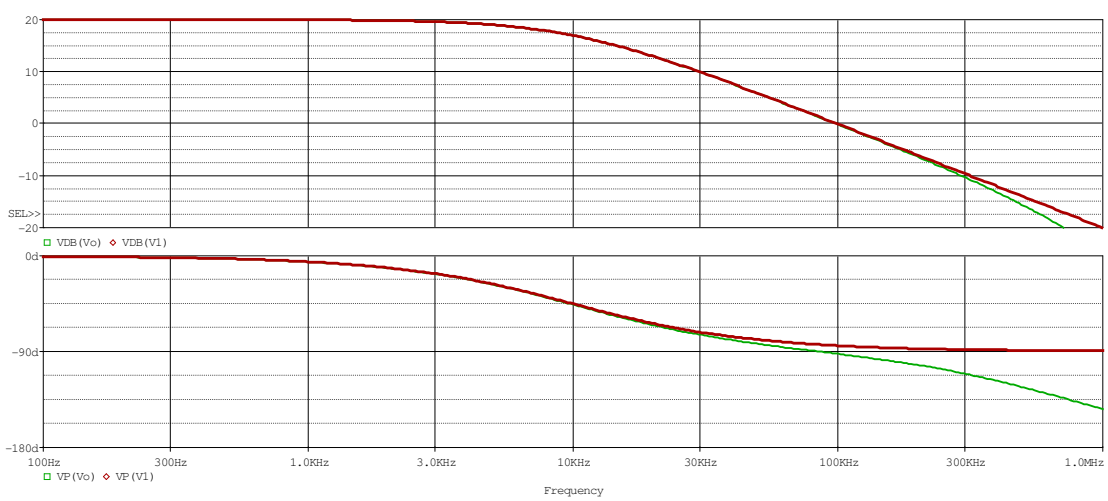
در این رابطه k یک ضریب ثابت بوده تاثیری در تعیین فرکانس حد ندارد. بنا بر این، مدار مانند یک پایین گذر درجه اول با فرکانس حد $f_h \approx 1/2\pi R1C1$ در نظر گرفته می‌شود. مثلاً با فرض: $R1 = 16k\Omega$، $C1 = 1nF$، $R2 = 22k\Omega$، $C2 = 10pF$ و $k = 10$، چون: $f_1 = 1/2\pi R1C1$، $f_2 = 1/2\pi R2C2$ و از آنجا:

$$\alpha = \frac{f_1}{f_2} = \frac{R2C2}{R1C1} = \frac{22k\Omega \cdot 10pF}{16k\Omega \cdot 1nF} = \frac{0.22}{16} \approx \frac{1}{70} << 1$$

بوده،

$$f_h \approx f_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R1 \cdot C1} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 16k\Omega \cdot 1nF} \approx 10kHz$$

بدست می‌آید. پاسخ فرکانسی این مدار در شکل ۱-۳۱ رسم شده است.



شکل ۱-۳۲ پاسخ فرکانسی مدار شکل ۱-۳۱ شکل بالا: دامنه، شکل پایین: فاز
نمودارهای قرمز: پاسخ تقریبی (R1C1)، نمودارهای سبز: پاسخ واقعی

چنان که ملاحظه می‌شود، بهره مدار در فرکانس‌های پایین $|A| = k = 10 \equiv 20dB$ است. در فرکانس $f \approx 10kHz$، بهره به $|A| \approx 17dB$ می‌رسد. بنا بر این فرکانس حد مدار $f_h \approx 10kHz$ است. نمودار دقیق؛ که پاسخ فرکانسی مدار درجه دو است (نمایش داده شده با رنگ سبز در شکل ۱-۳۲)، برای فرکانس-های تا بیش از ۱۰۰ کیلو هرتز، بر نمودار تقریبی؛ که پاسخ فرکانسی مدار درجه یک است (نمایش داده

شده با رنگ قرمز در شکل ۱-۳۲)، کاملاً منطبق است. برای فرکانس‌های حدود ۳۰۰ کیلو هرتز به بالا، اختلاف بین دو نمودار آشکار می‌شود. اختلاف بین دو نمودار برای فاز بیشتر مشهود است ولی در هر صورت برای فرکانس‌های کمتر از فرکانس حد، بجای تابع درجه دوم، می‌توان از تابع تقریبی درجه اول استفاده کرد.

حال می‌خواهیم ببینیم برای چه مقادیر α می‌تواند $\alpha << 1$ در نظر گرفته شده، بجای تابع درجه دوم مجاز به استفاده از رابطه تقریبی (۱-۵۳) هستیم. جدول ۱-۲ میزان خطای استفاده از رابطه (۱-۵۳) را بجای استفاده از رابطه (۱-۵۲) بر حسب مقدار α نمایش می‌دهد[1].

جدول ۱-۲ وابستگی دقت محاسباتی به مقدار α

α	1/10	1/5	1/3	1/2	1
f_2/f_1	10	5	3	2	1
f_h/f_1	0.990	0.964	0.912	0.838	0.644
$E_{rel}(f_h)[\%]$	0.986	3.79	9.70	19.4	55.4
$\lvert A(\Omega=1)\rvert\,[dB]$	-3.05	-3.18	-3.47	-3.98	-6.02

از این جدول می‌توان برای تخمین خطای محاسباتی ناشی از جانشینی یک پایین گذر بجای یک شبکه که از دو پایین گذر که توسط یک منبع وابسته از یک دیگر جدا شده‌اند، استفاده کرد. در این جدول $f_1 = 1/2\cdot\pi\cdot R_1\cdot C_1$ فرکانس حد مربوط به یک پایین گذر، $f_2 = 1/2\cdot\pi\cdot R_2\cdot C_2$ مربوط به پایین گذر دیگر است؛ به طوری که $f_2 \geq f_1$ باشد. f_h فرکانس حد شبکه کلی، $\alpha = f_1/f_2$ و $E_{rel}(f_h)$ خطای نسبی فرکانس حد شبکه است. $\Omega = \omega/\omega_1 = f/f_1$ و $\lvert A(\Omega=1)\rvert$ بهره شبکه به ازای $f = f_1$ است. برای مثال اگر دو پایین گذر با فرکانس حد یکی ده برابر فرکانس حد دیگری ($f_2/f_1 = 10$)

[1] ر. ک. به پیوست ۱-۵

توسط یک منبع وابسته دنبال هم بسته شده باشند، فرکانس حد سیستم $f_h = 0.99 f_1$ خواهد بود. بنا بر این اگر فرکانس حد شبکه را با فرکانس حد پایین گذر با فرکانس حد کمتر یکسان بگیریم، مرتکب خطایی معادل $E_{rel}(f_h) \approx 1\%$ خواهیم شد. در ضمن به ازای فرکانس حد f_1، بهره ($|A|$) بجای $-3.01dB$ به اندازه $-3.05dB$ افت خواهد کرد. اگر فرکانس حد هر دو پایین گذر برابر باشند ($\alpha = 1$) فرکانس حد سیستم $f_h = 0.644 f_1$ خواهد بود. بنا بر این اگر فرکانس حد شبکه را با فرکانس حد پایین گذر با فرکانس حد کمتر یکسان بگیریم، مرتکب خطایی معادل $E_{rel}(f_h) \approx 55.4\%$ شده‌ایم. در ضمن به ازای فرکانس حد f_1، بهره ($|A|$) بجای $-3.01dB$ به اندازه $-6.02dB$ افت خواهد کرد. بنا بر این چنان که خطای محاسباتی حدود ۵٪ مجاز باشد، می‌توان $\alpha = 0.2$ را معادل $\alpha << 1$ دانست. حتی اگر خطای محاسباتی فرکانس حد، حدود ۱۰٪ مجاز باشد؛ $\alpha = 0.3 << 1$ نیز قابل قبول است. به همین دلیل هرگاه دو مدار پایین گذر، با فرکانس حد یکی، بیش از ۷ – ۸ برابر فرکانس حد دیگری، به واسته یک منبع وابسته از یک دیگر جدا شده باشند؛ فرکانس حد مجموعه حدوداً برابر فرکانس حد پایین‌تری خواهد بود. اصطلاحاً به فرکانس حد پایین گذر کوچک تر، "*فرکانس غالب*" گویند.

تذکر ۱: مطالب ذکر شده، در مورد تعداد بیشتر از دو پایین گذر نیز صادق است.

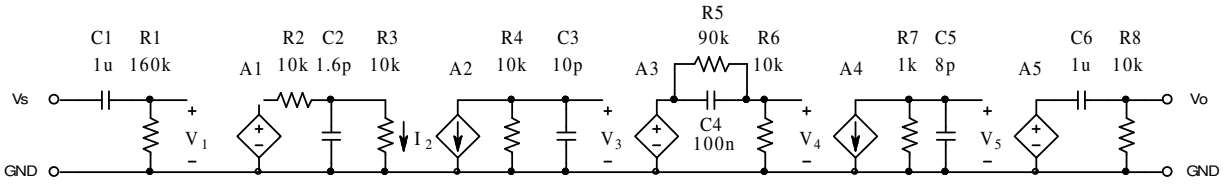
تذکر ۲: مطالب ذکر شده، در مورد چند بالا گذر نیز صادق است. البته توجه شود که در این مورد فرکانس غالب، فرکانس حد بزرگترین بالا گذر است.

تذکر ۳: مطالب ذکر شده، در مورد یک شبکه تشکیل شده از چند بالا گذر و پایین گذر نیز صادق است. البته توجه شود که در این حالت دو فرکانس حد و در نتیجه دو فرکانس غالب وجود دارد، یک فرکانس حد بالا گذر، و یک فرکانس حد پایین گذر. مطالب فوق در صورتی صادق هستند که فرکانس

غالب بالا گذرها (f_l) خیلی کمتر از فرکانس غالب پایین گذرها (f_h) باشد ($f_l << f_h$). در این صورت، شبکه یک میان گذر است.

تذکر ٤: برای رسم پاسخ فرکانسی شبکه، مجموع پاسخ فرکانسی تک تک مدارها را بدست می-آوریم (چرا؟).

مثال ۱-۱٤ پاسخ فرکانسی، فرکانس‌های حد و بهره در فرکانس‌های میانی مدار شکل ۱-۳۳ را با فرض $A1=1$، $A2=40$، $A3=5$، $A4=10mA/V$ و $A5=10$، بدست آورید.



شکل ۱-۳۳ مدار مثال ۱-۱٤

حل: تابع تبدیل شبکه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A(j\omega)=\frac{V_o(j\omega)}{V_s(j\omega)}=\frac{V_o(j\omega)}{V_5(j\omega)}\cdot\frac{V_5(j\omega)}{V_4(j\omega)}\cdot\frac{V_4(j\omega)}{V_3(j\omega)}\cdot\frac{V_3(j\omega)}{V_2(j\omega)}\cdot\frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}\cdot\frac{V_1(j\omega)}{V_s(j\omega)}$$

چنان که ملاحظه می‌شود، شبکه از سه بالا گذر ($C1$، $C4$، $C6$ و المانهای مربوطه) و سه پایین گذر ($C2$، $C3$، $C5$ و المانهای مربوطه) تشکیل شده است. ثابت زمانی هر کدام از قسمت‌ها:

بالا گذرها:

$$\tau_a=R1\cdot C1=160k\Omega\cdot 1\mu F=160ms \quad\rightarrow\quad f_a\approx 1Hz$$
$$\tau_b=(R5\|R6)\cdot C4=9k\Omega\cdot 100nF=900\mu s \quad\rightarrow\quad f_b\approx 175Hz$$
$$\tau_c=R8\cdot C6=10k\Omega\cdot 1\mu F=10ms \quad\rightarrow\quad f_c\approx 16Hz$$

و در نتیجه:

$$f_l=f_b\approx 175Hz$$

پایین گذرها:

$$\tau_d=(R2\|R3)\cdot C2=5k\Omega\cdot 1.6pF=8ns \quad\rightarrow\quad f_d\approx 20MHz$$
$$\tau_e=R4\cdot C3=10k\Omega\cdot 10pF=100ns \quad\rightarrow\quad f_e\approx 1.6MHz$$
$$\tau_f=R7\cdot C5=1k\Omega\cdot 8pF=8ns \quad\rightarrow\quad f_f\approx 20MHz$$

و در نتیجه:

$$f_h = f_e \approx 1.6MHz$$

برای فرکانس‌های میانی (A_{mb})، یعنی جایی که خازن‌های بالا گذرها مثل اتصال کوتاه و خازن‌های پایین گذرها مثل اتصال باز عمل می‌کنند:

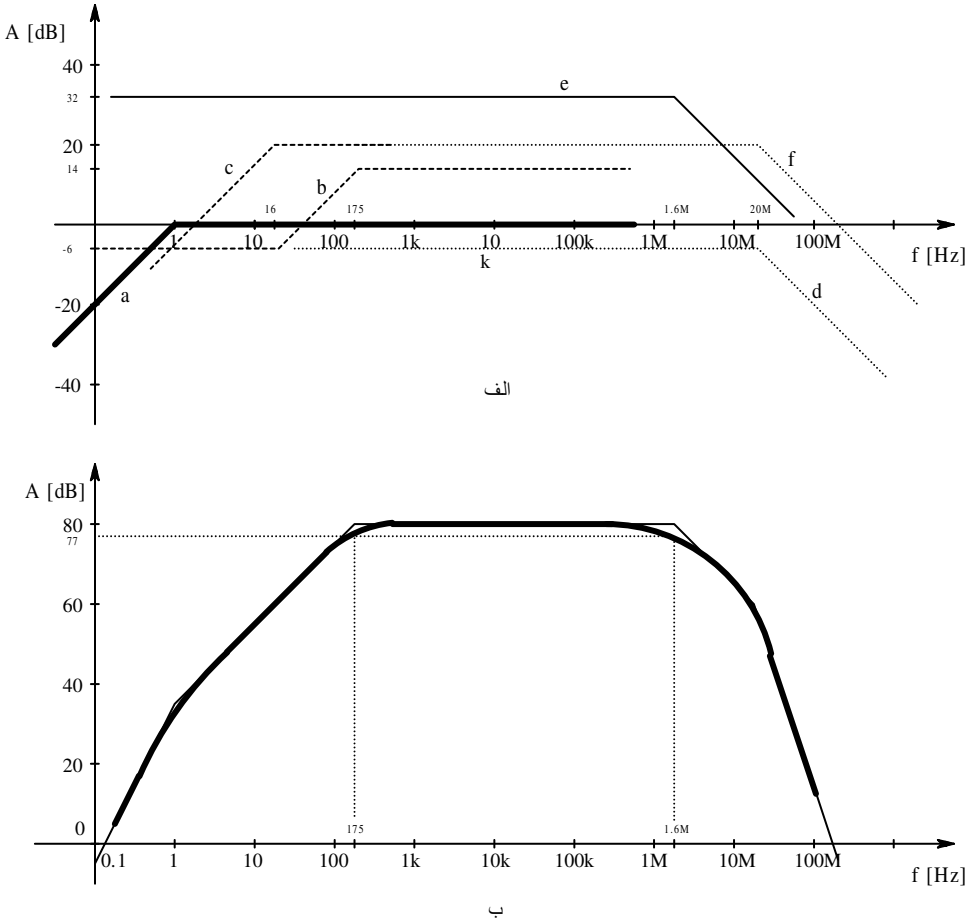
$$|A(j\omega)| = A = \frac{V_o}{V_s} = \frac{V_o}{V_5} \times \frac{V_5}{V_4} \times \frac{V_4}{V_3} \times \frac{V_3}{V_2} \times \frac{V_2}{V_1} \times \frac{V_1}{V_s}$$

$$A_{mb} = A5 \times R7 \cdot A4 \times A3 \times \frac{R4}{R3} \cdot A2 \times \frac{R3}{R3+R2} \cdot A1$$

$$A_{mb} = 10 \times 1k\Omega \cdot 10mA/V \times 5 \times \frac{10k\Omega}{10k\Omega} \cdot 40 \times \frac{10k\Omega}{10k\Omega + 10k\Omega} \cdot 1$$

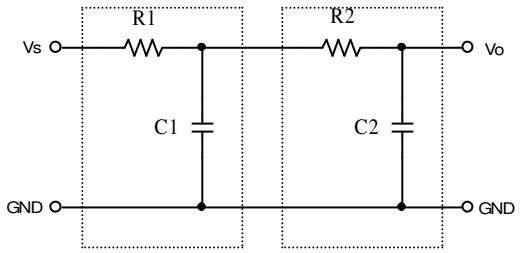
$$A_{mb} = 10 \times 10 \times 5 \times 40 \times 0.5 = 10000 \equiv 80dB$$

بنا بر این جواب مسئله: $f_l = 175Hz$ ، $f_h = 1.6MHz$ و $A_{mb} = 80dB$ خواهد بود.



شکل ۱-۳٤ پاسخ فرکانس مدار شکل ۱-۳۳ الف- تک تک طبقات ب- مجموعه سیستم

مثال ۱-۱۵ فرکانس‌های حد مدار شکل ۱-۳۵ را برای مقادیر خواسته شده بدست آورید.



شکل ۱-۳۵ مدار مثال ۱-۱۵

الف- $R1 = 16k\Omega, C1 = 1nF, R2 = 160k, C2 = 1nF$

ب- $R1 = 160k\Omega, C1 = 1nF, R2 = 16k, C2 = 1nF$

ج- $R1 = 16k\Omega, C1 = 10nF, R2 = 16k, C2 = 1nF$

د- $R1 = 16k\Omega, C1 = 1nF, R2 = 16k, C2 = 10nF$

حل: این شبکه نیز تشکیل شده است از دو مدار پایین گذر. ولی بر خلاف مثال‌های قبل، دو طبقه توسط یک منبع وابسته از یک دیگر جدا نشده اند. بنابراین باید اثر بار گذاری طبقات را بر روی یک دیگر در نظر گرفت. راه حل کلی بدست آوردن پاسخ فرکانسی چنین شبکه‌هایی، جانشینی خازن‌ها (و سلف‌ها) با راکتانس آنها و استفاده از روش‌های آموخته شده - مثلاً استفاده از قوانین کیرشهف - است. این روش و روش‌های سیستماتیک[1] دیگر، نسبتاً پیچیده و حل کردن آنها وقت گیر است. در شرایط خاص که مثلاً مانند مثال‌های قبل فرکانس‌های حد هر کدام از طبقات خیلی با هم تفاوت داشته باشند (معمولاً نسبت ۱۰ یا بزرگتر) می‌توان به طور تقریبی مدارها را - مانند حالتی که طبقات توسط منابع وابسته از یک دیگر جدا شده بودند - در زمان کوتاهی حل کرد. طبیعتاً در این حالت چون منبع وابسته وجود ندارد، باید اثر بارگذاری طبقات را بر روی هم در نظر گرفت. حال با توجه به مطالب ذکر شده مسئله را به طور تقریبی حل می‌کنیم. برای مقایسه جواب‌های دقیق داخل پرانتز ذکر شده‌اند.

الف-

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 16k\Omega \cdot 1nF = 16\mu s$$
$$\tau_2 = \cdot R2 \cdot C2 = 160k\Omega \cdot 1nF = 160\mu s$$

در نتیجه:

$$\tau_2 >> \tau_1$$

[1] ر. ک. به دروس دیگر نظیر درس تئوری مدار ترم آینده.

پس می‌توان از روش تقریبی استفاده کرد. برای در نظر گرفتن اثر بار گذاری طبقات چنین استدلال می کنیم:

هر دو طبقه پایین گذر هستند. بنابراین وقتی از فرکانس کم شروع کنیم، هر دو خازن دارای راکتانس زیادی (در مقایسه با مقاومت‌های مربوطه) هستند. به تدریج که فرکانس زیاد می شود، چون $C1 = C2$ و $\tau_2 >> \tau_1$ لذا اول پایین گذر $R2C2$ موثر میشود و سپس، در فرکانس‌های بالاتر؛ $R1C1$. از آن جایی که در فرکانس $f_2 = 1/2 \cdot \pi \cdot R2 \cdot C2$ داریم $X_{C2} = R2$ و $X_{C1} = X_{C2} >> R1$. پس می توان از اثر $C1$ در مقابل $R1$ صرفنظر کرد (آنرا اتصال باز در نظر گرفت در نتیجه:

$$\tau = (R1 + R2) \cdot C2 = (16k\Omega + 160k\Omega) \cdot 1nF = 176\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau \approx 904Hz \approx 900Hz \qquad (890.6Hz)$$

ب-

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 160k\Omega \cdot 1nF = 160\mu s$$
$$\tau_2 = R2 \cdot C2 = 16k\Omega \cdot 1nF = 16\mu s$$

در نتیجه:

$$\tau_1 >> \tau_2$$

پس اول $R1C1$ موثر می شود

$$R2 << X_{C2} = X_{C1} \quad \Rightarrow R2 \to 0$$

بنابراین:

$$\tau = R1 \cdot (C1 \| C2) = 160k\Omega \cdot (1nF \| 1nF) = 320\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau \approx 497Hz \approx 500Hz \qquad (484.8Hz)$$

ج-

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 16k\Omega \cdot 10nF = 160\mu s$$
$$\tau_2 = R2 \cdot C2 = 16k\Omega \cdot 1nF = 16\mu s$$

در نتیجه:

$$\tau_1 >> \tau_2$$

پس اول $R1C1$ موثر می شود

$$R2 << X_{C2} = X_{C1} \quad \Rightarrow R2 \to 0$$

بنابراین:

$$\tau = R1 \cdot (C1 \| C2) = 16k\Omega \cdot (10nF \| 1nF) = 176\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau \approx 904Hz \approx 900Hz \qquad (890.6Hz)$$

د-

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 16k\Omega \cdot 1nF = 16\mu s$$
$$\tau_2 = \cdot R2 \cdot C2 = 16k\Omega \cdot 10nF = 160\mu s$$

در نتیجه:

$$\tau_1 << \tau_2$$

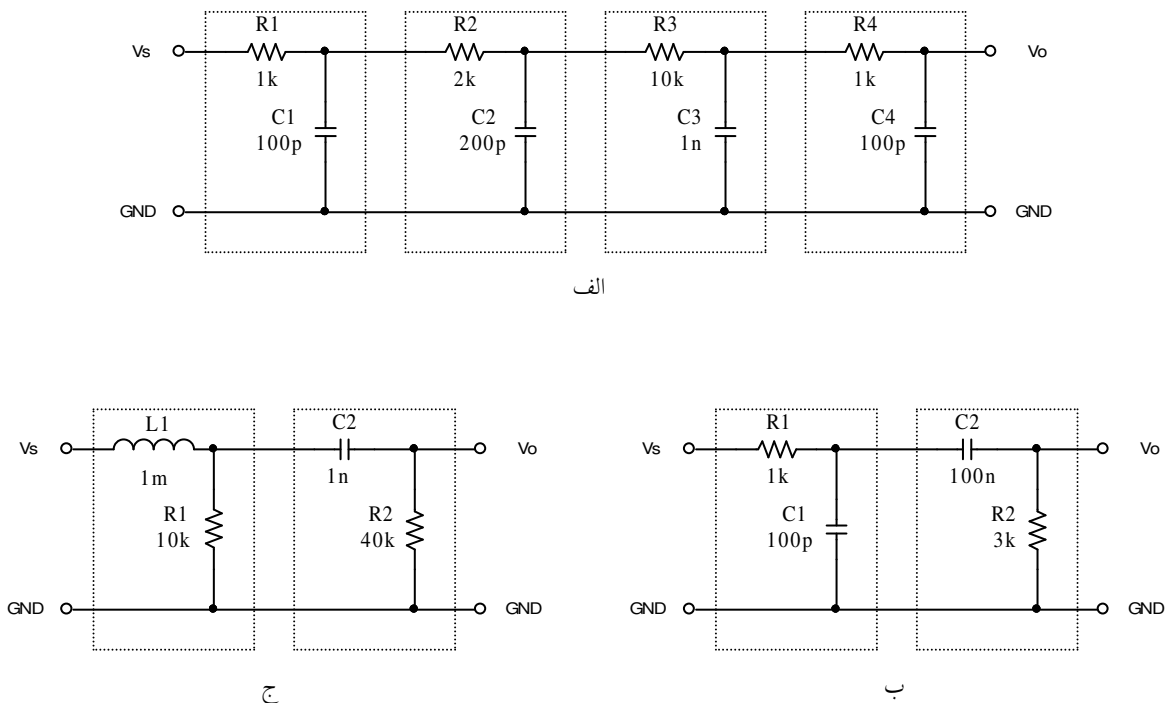
پس اول $R2C2$ موثر می شود

$$X_{C1} << X_{C2} = R2 = R1 \quad \Rightarrow C1 \to 0$$

بنابراین:

$$\tau = (R1 + R2) \cdot C2 = (16k\Omega + 16k\Omega) \cdot 10nF = 320\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau \approx 497Hz \approx 500Hz \qquad (484.8Hz)$$

مثال ۱-۱۶ فرکانس های حد مدارهای شکل ۱-۳۶ را بدست آورید.



شکل ۱-۳۶ مدارهای مثال ۱-۱۶

حل:

الف– این مدار از ٤ طبقه پایین گذر تشکیل شده است:

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 1k\Omega \cdot 100pF = 100ns$$
$$\tau_2 = R2 \cdot C2 = 2k\Omega \cdot 200pF = 400ns$$
$$\tau_3 = R3 \cdot C3 = 10k\Omega \cdot 1nF = 10\mu s$$
$$\tau_4 = R4 \cdot C4 = 1k\Omega \cdot 100pF = 100ns$$

در نتیجه:

$$\tau_3 >> \tau_2 > \tau_1 = \tau_4$$

اول $R3C3$ موثر می شود، پس:

$$C1,\ C2,\ R4 \rightarrow 0$$

بنابراین:

$$\tau_h = (R1 + R2 + R3) \cdot (C3 \| C4) = 13k\Omega \cdot 1.1nF = 14.3\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_h \approx 11.13kHz \approx 11kHz \qquad (10.993kHz)$$

ب– این مدار از یک طبقه پایین گذر یک طبقه بالا گذر تشکیل شده است:

بالا گذر (τ_2) و پایین گذر (τ_1):

$$\tau_1 = R1 \cdot C1 = 1k\Omega \cdot 100pF = 100ns$$
$$\tau_2 = R2 \cdot C2 = 3k\Omega \cdot 100nF = 300\mu s$$
$$\tau_2 >> \tau_1$$

بنابراین در فرکانس های میانی $C1$ مانند اتصال باز و $C2$ مثل اتصال کوتاه عمل می کند. در فرکانس حد پایین مدار، یعنی هنگامی که $C2$ می خواهد از حالت اتصال کوتاه بودن به سمت حالت اتصال باز بودن میل کند، خازن $C1$ مسلماً هنوز مانند اتصال باز عمل می کند. همچنین در فرکانس حد بالای مدار، یعنی هنگامی که $C1$ می خواهد از حالت اتصال باز بودن به سمت حالت اتصال کوتاه بودن میل کند، خازن $C2$ مسلماً هنوز مانند اتصال کوتاه عمل می کند. لذا در هر کدام از فرکانس های حد فقط یکی از خازن ها موثر بوده:

$$\tau_l = (R1 + R2) \cdot C2 = 4k\Omega \cdot 100nF = 400\mu s$$
$$f_l = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_l \approx 397.9Hz \approx 400Hz \qquad (397.7Hz)$$
$$\tau_h = (R1 \| R2) \cdot C1 = 0.75k\Omega \cdot 100pF = 75ns$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_h \approx 2.122MHz \approx 2.1MHz \qquad (2.123MHz)$$

ج- این مدار نیز از یک طبقه پایین گذر یک طبقه بالا گذر تشکیل شده است:

بالا گذر (τ_2) و پایین گذر (τ_1):

$$\tau_1 = L1/R1 = 1mH/10k\Omega = 100ns$$
$$\tau_2 = R2 \cdot C2 = 40k\Omega \cdot 1nF = 40\mu s$$
$$\tau_2 >> \tau_1$$

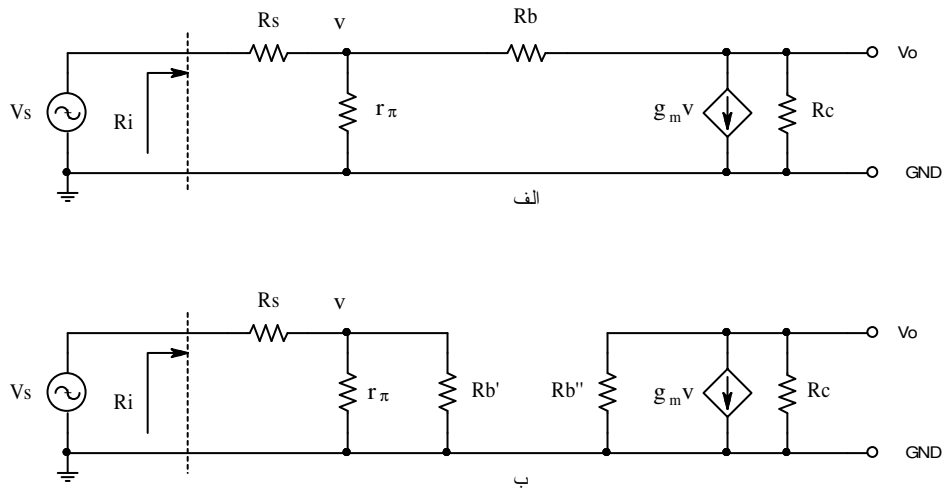
بنابراین در فرکانس های میانی $L1$ و $C2$ مانند اتصال کوتاه عمل می کنند. در فرکانس حد پایین مدار، یعنی هنگامی که $C2$ می خواهد از حالت اتصال کوتاه بودن به سمت حالت اتصال باز بودن میل کند، سلف $L1$ مسلماً هنوز مانند اتصال کوتاه عمل می کند. همچنین در فرکانس حد بالای مدار، یعنی هنگامی که $L1$ می خواهد از حالت اتصال کوتاه بودن به سمت حالت اتصال باز بودن میل کند، خازن $C2$ مسلماً هنوز مانند اتصال کوتاه عمل می کند. لذا در فرکانس حد پایین فقط خازن و در فرکانس حد بالا فقط سلف موثر بوده:

$$\tau_l = R2 \cdot C2 = 40k\Omega \cdot 1nF = 40\mu s$$
$$f_l = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_l \approx 3.979kHz \approx 4kHz \qquad (3.977kHz)$$
$$\tau_h = L1/(R1 \| R2) = 1mH/8k\Omega = 0.125\mu s$$
$$f_h = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_h \approx 1.273MHz \approx 1.3MHz \qquad (1.274MHz)$$

پیوست‌ها

پ ۱-۱ محاسبه خطا در استفاده تقریبی از قضیه میلر

مدار شکل ۱-۱۱ الف یکی از مدارهای استاندارد در الکترونیک است که برای یک مدار ترانزیستوری[1] در شکل پ ۱-۱ مجدداً نمایش داده شده است.



شکل پ ۱-۱ محاسبه میزان خطا در استفاده تقریبی از قضیه میلر الف- مدار اصلی، ب- مدار معادل

برای محاسبه مقاومت ورودی، طبق قضیه میلر R_b در مدار شکل پ ۱-۱ الف را با دو مقاومت $R_b^{'}$ و $R_b^{''}$ در شکل پ ۱-۱ ب جایگزین می‌کنیم. از (۱-۳۳):

$$K=\frac{V_o}{v},\qquad R_b^{'}=\frac{R_b}{1-K},\quad R_b^{''}=\frac{K\cdot R_b}{K-1} \qquad \text{(پ ۱-۱)}$$

از روابط (پ ۱-۱) محاسبه دقیق K:

$$\begin{cases} K=\dfrac{V_o}{v}=-g_m\left(R_c\|R_b^{''}\right) & \text{(پ ۱-۲)} \\ R_b^{''}=\dfrac{K\cdot R_b}{K-1} & \text{(پ ۱-۳)} \end{cases}$$

با جانشینی (پ ۱-۳) در (پ ۱-۲):

[1] ر. ک. به فصل ۵-...

$$K = -g_m \cdot \left(R_c \left\| \frac{K \cdot R_b}{K-1} \right. \right)$$

$$K = -g_m \cdot \left(\frac{R_c \cdot \frac{K \cdot R_b}{K-1}}{R_c + \frac{K \cdot R_b}{K-1}} \right) = -g_m \cdot \frac{K \cdot R_b \cdot R_c}{K \cdot R_c - R_c + K \cdot R_b}$$

$$K = -(g_m \cdot R_b - 1) \cdot \frac{R_c}{R_b + R_c} \qquad \text{(پ ۱-٤)}$$

محاسبه تقریبی K با جانشینی $R_b'' \approx R_b$:

$$K \approx K' = -g_m \left(R_c \| R_b \right) = -g_m \cdot \frac{R_c \cdot R_b}{R_c + R_b} \qquad \text{(پ ۱-۵)}$$

محاسبه خطا با استفاده از (پ ۱-٤) و (پ ۱-۵):

$$E_{abs}(K) = K' - K = \left(-(g_m \cdot R_b - 1) \cdot \frac{R_c}{R_b + R_c} \right) - \left(-g_m \cdot \frac{R_c \cdot R_b}{R_c + R_b} \right)$$

$$E_{abs}(K) = \frac{R_c}{R_b + R_c}$$

و از آنجا:

$$E_{rel}(K) = \frac{E_{abs}(K)}{K} = \frac{1}{1 - g_m \cdot R_b} \qquad \text{(پ ۱-٦)}$$

پ-۱-۲ نحوه محاسبه میزان خطا در ترکیب مقاومت‌ها

می‌خواهیم تأثیر میزان خطای یک مقاومت – با فرض دقیق بودن سایر مقاومت‌ها – را بر روی مقاومت معادل یک شبکه مقاومتی بدست آوریم. منظور از ترکیب مقاومت‌ها این است که چند مقاومت بصورت سری یا موازی به یک دیگر متصل شده باشند. در ابتدا مسئله را برای ترکیب دو مقاومت بررسی می‌کنیم. برای تعداد بیشتر مقاومت‌ها، از ترکیب دو دویی آنها استفاده می کنیم. با فرض $R_1 = R_a$ ، $R_2^{'} = R_b$ و $R_2 = R_b + \Delta R = R_b \cdot (1 + E_{rel})$:

- ترکیب سری دو مقاومت:

$$R_{eq}^{'} = R_1 + R_2^{'} = R_a + R_b$$
$$R_{eq} = R_1 + R_2 = R_a + R_b \cdot (1 + E_{rel})$$
$$\Delta R_{eq} = R_{eq} - R_{eq}^{'} = R_b \cdot E_{rel}$$
$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}^{'}} = \frac{R_b \cdot E_{rel}}{R_a + R_b} = \frac{E_{rel}}{1 + R_a / R_b}$$

یعنی:

$$E_{rel}(R_{eq}) = E_{rel}(R_b) \cdot \frac{R_b}{R_a + R_b} \qquad \text{(پ ۱-۷)}$$

بنا بر این هر گاه یک مقاومت نا دقیق با یک مقاومت دقیق سری شود، خطای نسبی مقاومت معادل همواره از خطای نسبی مقاومت نا دقیق، کمتر است. مثلاً اگر یک مقاومت دقیق $R_1 = 100k\Omega$ با یک مقاومت $R_2 = 10k\Omega \pm 10\%$ سری شود مقاومت حاصل $R_{eq} \approx 110k\Omega \pm 1\%$ خواهد بود.

- ترکیب موازی دو مقاومت:

$$R_{eq}^{'} = R_1 \| R_2^{'} = \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b}$$

$$R_{eq} = R_1 \| R_2 = \frac{R_a \cdot R_b \cdot (1 + E_{rel})}{R_a + R_b \cdot (1 + E_{rel})}$$

$$\Delta R_{eq} = R_{eq} - R_{eq}^{'}$$

$$\Delta R_{eq} = \frac{R_a^2 \cdot R_b \cdot E_{rel}}{(R_a + R_b) \cdot (R_a + R_b \cdot (1 + E_{rel}))}$$

$$\frac{\Delta R_{eq}}{R_{eq}^{'}} = \frac{R_a \cdot E_{rel}}{R_a + R_b \cdot (1 + E_{rel})} \approx \frac{E_{rel}}{1 + R_b / R_a}$$

یعنی:

$$E_{rel}(R_{eq}) \approx E_{rel}(R_b) \cdot \frac{R_a}{R_a + R_b} \qquad \text{(پ ۱–۸)}$$

بنابراین هر گاه یک مقاومت نا دقیق با یک مقاومت دقیق موازی شود، خطای نسبی مقاومت معادل همواره از خطای نسبی مقاومت نا دقیق، کمتر است. مثلاً اگر یک مقاومت دقیق $R_1 = 10k\Omega$ با یک مقاومت $R_2 = 100k\Omega \pm 10\%$ موازی شود مقاومت حاصل $R_{eq} \approx 9.1k\Omega \pm 1\%$ خواهد بود.

پ-۱-۳ نحوه رسم پاسخ فرکانسی

برای رسم پاسخ فرکانسی یک سیستم الکتریکی، می‌توانید به نحو زیر عمل کنید:

۱- جدولی با ۷ ستون و n + 1 ردیف مانند جدول پ-۱-۱ رسم نمایید (n تعداد فرکانس-های اندازه‌گیری شده است).

۲- یک منبع سیگنال سینوسی، با فرکانس قابل تنظیم، را بـه ورودی سیـستم متـصل کـرده، همزمان ولتاژ ورودی و ولتاژ خروجی را بر روی صفحه اسیلوسکپ مشاهده نمایید. (بهتر است سیگنال ورودی به کانال ۱ و سیگنال خروجی به کانال ۲ اعمال شوند.)

۳- فرکانس سیگنال ژنراتور را از پایین‌ترین حد مطلوب، f_l، تا بالاترین حـد مطلـوب، f_h، تغییر دهید تا دامنه خروج به یک مقدار حداکثر برسد؛ یا در آن ثابت بماند.

٤- در صورتی که سیگنال‌های ورودی یا خروجی به ازای محدوده فرکانسی بند ۳ اشباع (از حالت سینوسی خارج) شده باشند، دامنه سیگنال ژنراتور را به حدی کـم کنیـد تـا شـکل موج‌های ورودی و خروجی مجدداً سینوسی شوند.

۵- در صورتی که دامنه سیگنال ورودی یا خروجی بـه ازای محـدوده فرکانـسی بنـد ۳ بـه حدی کم باشد، که نتوان آن را بر روی صفحه اسیلوسکپ اندازه‌گیری کرد، با توجه به بند ٤، دامنه سیگنال ژنراتور را به حدی زیاد کنید که شکل موج‌هـای ورودی و خروجـی بـه خوبی قابل اندازه‌گیری باشند.

٦- فرکانس سیگنال ژنراتور را به مقدار $f_1 = f_l$ برگردانید.

۷- مقادیر دامنه‌های ورودی و خروجی و مقدار اختلاف زمان گذر از صـفر بـین ورودی و خروجی را در جدول یادداشت کنید. فرکانس سیگنال به کمک فرکانس‌متر یا اسیلوسـکپ اندازه گرفته شود.

۸- فرکانس سیگنال ژنراتور را به مقدار $f_2 = f_l + \Delta f$ تغییر داده مرحله ۷ را تکرار کنید. Δf مقدار مثبتی بوده، مبین فاصله فرکانسی دو مقدار اندازه‌گیری شده متوالی می‌باشد.

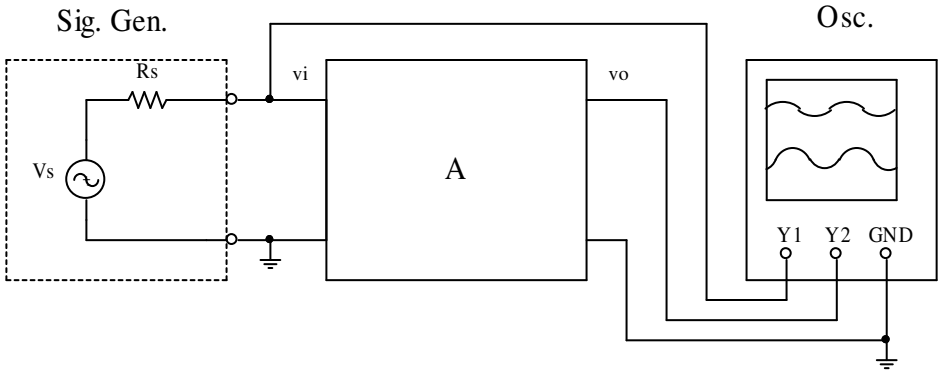
۹- مرحله ۸ را آنقدر تکرار کنید تا $f_n \geq f_h$ شود.

۱۰- بکمک مقادیر اندازه‌گیری شده نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز سیگنال‌های ورودی و خروجی محاسبه شود.

۱۱- بکمک مقادیر محاسبه شده نمودارها توسط نقطه‌یابی رسم شوند.

تذکر: در اکثر موارد پاسخ دامنه به فرکانس از اهمیت بیشتری نسبت به پاسخ فاز برخوردار است. به همین دلیل اکثراً به رسم پاسخ دامنه اکتفا می‌شود.

مثال پ-۱-۱ فرض کنیم می‌خواهیم پاسخ فرکانسی یک شبکه الکتریکی بنام شبکه A را در محدوده فرکانسی صفر تا ۲۰ کیلو هرتز با فاصله‌های یک کیلو هرتز بدست آوریم. برای این منظور مطابق شکل پ-۱-۲ ورودی شبکه (v_i) را توسط یک منبع سیگنال سینوسی (Sig. Gen.) تحریک



شکل پ-۱-۲ نحوه اندازه گیری پاسخ فرکانسی

می‌نماییم. همزمان این سیگنال را به ورودی کانال ۱ (Y1) اسیلوسکپ (Osc.) اعمال می‌کنیم. خروجی شبکه (v_o) به کانال ۲ (Y2) اسیلوسکپ وصل می‌شود. حال طبق دستورالعمل فوق اندازه‌گیری را انجام می‌دهیم.

در این مثال: $f_l = 0$ ، $f_h = 20kHz$ و $\Delta f = 1kHz$ است. بنابراین $n = 21$ بوده جدول ۲۲ ردیف خواهد داشت. به علت این که فرکانس صفر قابل تولید نیست با کمترین فرکانس سیگنال ژنراتور –که معمولاً ده هرتز است– شروع می کنیم.

در این جدول: n شماره ردیف به عبارت دیگر شماره مرحله اندازه‌گیری، f فرکانس تنظیم شده در هر مرحله برحسب کیلو هرتز، V_{IP} دامنه ولتاژ ورودی[1]، بر حسب ولت، V_{OP} دامنه ولتاژ خروجی[2]، بر حسب ولت، Δt اختلاف زمان گذر از صفر بین سیگنال‌های ورودی و خروجی برحسب میکروثانیه، میباشند؛ که این سه مقدار توسط اسیلوسکپ اندازه‌گیری می‌شوند. در دو ستون بعدی مقادیر محاسبه شده یعنی |Al|، که عبارت از نسبت دامنه سیگنال خروجی به دامنه سیگنال ورودی است (مقداری بدون واحد) و فاز (Phase) بر حسب درجه، که با توجه به مقادیر Δt و f بدست می‌آید، وارد می‌شوند.

برای بدست آوردن مقادیر ستون |Al|، باید مقادیر ردیف‌های ستون V_{OP} [V] به مقادیر ردیف‌های ستون V_{OP} [V] تقسیم شوند. برای محاسبه فاز بعبارت دیگر، بدست آوردن مقادیر ستون Phase از رابطه (پ–۱–۹) استفاده میشود.

$$\varphi = 360 \times \Delta t \times f \qquad \text{(پ–۱–۹)}$$

در این رابطه: φ اختلاف فاز بین خروجی[3] و ورودی برحسب درجه، Δt اختلاف زمان گذر از صفر بین خروجی و ورودی برحسب ثانیه و f فرکانس بر حسب هرتز است. توجه شود که اگر گذر از صفر خروجی بعد از گذر از صفر ورودی اتفاق بیفتد، Δt و در نتیجه φ مقداری منفی خواهند بود؛ در

---

[1] V_{IP}: Peak Input Voltage

[2] V_{OP}: Peak Output Voltage

[3] منظور از اصطلاحات ورودی و خروجی در متن، سیگنال ورودی و سیگنال خروجی است، که برای روان‌تر شدن جمله معمولاً کلمه سیگنال ذکر نمی‌شود

این صورت گویند خروجی نسبت به ورودی تأخیر فاز یا پس فـاز[1] دارد. در حالـت عکـس، خروجـی نسبت به ورودی تقدم فاز یا پیش فاز[2] خواهد داشت.

جدول پ-۱-۱ مقادیر اندازه‌گیری و محاسبه شده مثال شکل پ-۱-۲

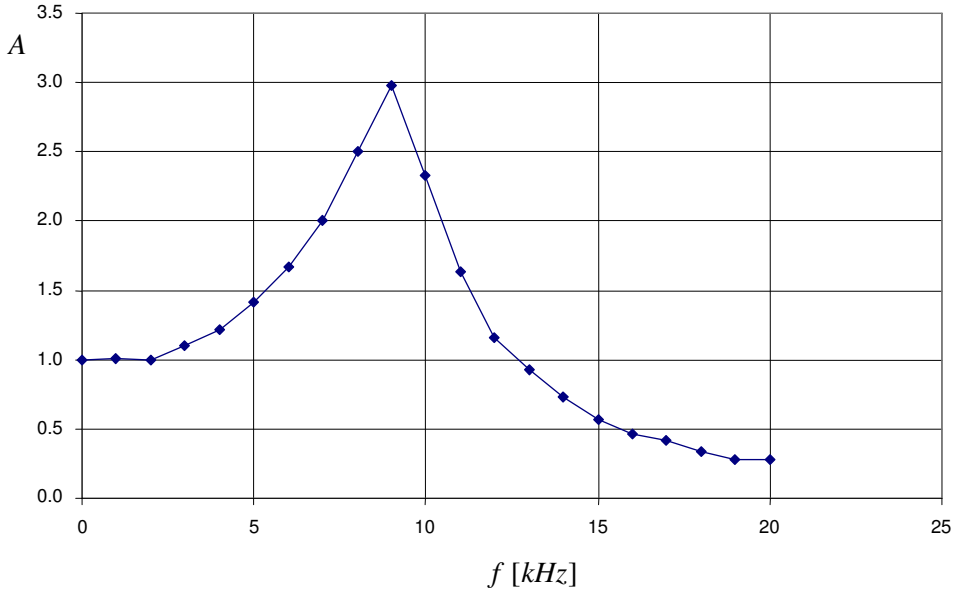
n	f [kHz]	V_{IP} [V]	V_{OP} [V]	Δt [μs]	|A|	Phase [º]
1	0.01	1	1	0	1	0
2	1	1	1	0	1	0
3	2	1	1	0	1	0
4	3	0.95	1.05	-6	1.1	-6
5	4	0.9	1.1	-7	1.2	-10
6	5	0.85	1.2	-8	1.4	-14
7	6	0.75	1.25	-10	1.7	-22
8	7	0.65	1.3	-13	2	-33
9	8	0.5	1.25	-18	2.5	-52
10	9	0.4	1.2	-26	3	-84
11	10	0.45	1.05	-32	2.3	-115
12	11	0.55	0.9	-34	1.6	-135
13	12	0.65	0.75	-34	1.2	-147
14	13	0.7	0.65	-33	0.9	-154
15	14	0.75	0.55	-31	0.7	-156
16	15	0.8	0.45	-30	0.6	-162
17	16	0.85	0.4	-28	0.5	-161
18	17	0.85	0.35	-27	0.4	-165
19	18	0.9	0.3	-26	0.3	-168
20	19	0.9	0.25	-24	0.3	-164
21	20	0.9	0.25	-23	0.3	-166

تمرین: رابطه (پ-۱-۹) را اثبات نمایید.

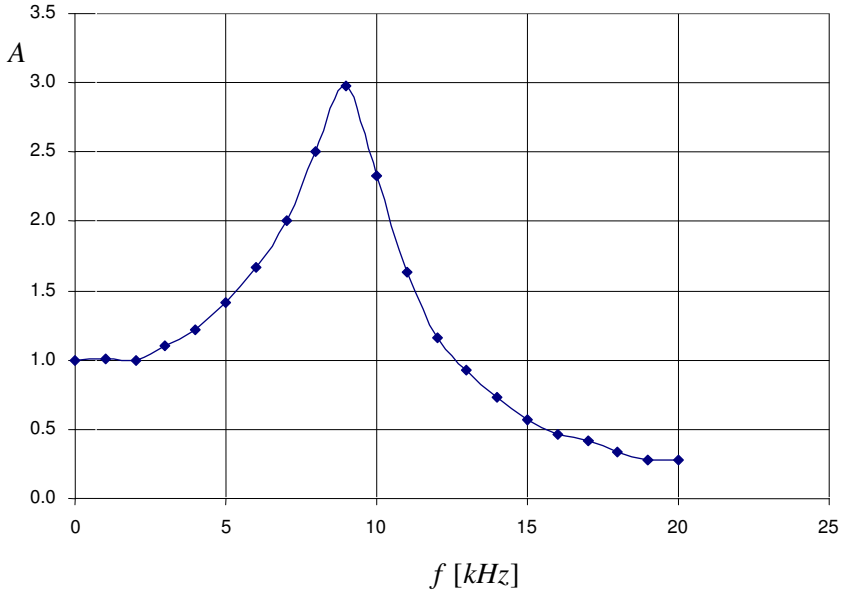
---

[1] Lag
[2] Lead

در شکل پ-۱-۳ دامنه پاسخ فرکانسی نمایش داده شده است. برای رسم این نمودار نقاط بدست آمده توسط پاره خطهایی به یک دیگر وصل شده‌اند. برای حصول دقت بیشتر، به عبارت دیگر نزدیک‌تر بودن نمودار به مقدار واقعی، معمولاً مانند شکل پ-۱-٤ نقاط را توسط منحنیهایی به یک دیگر وصل می‌کنند.

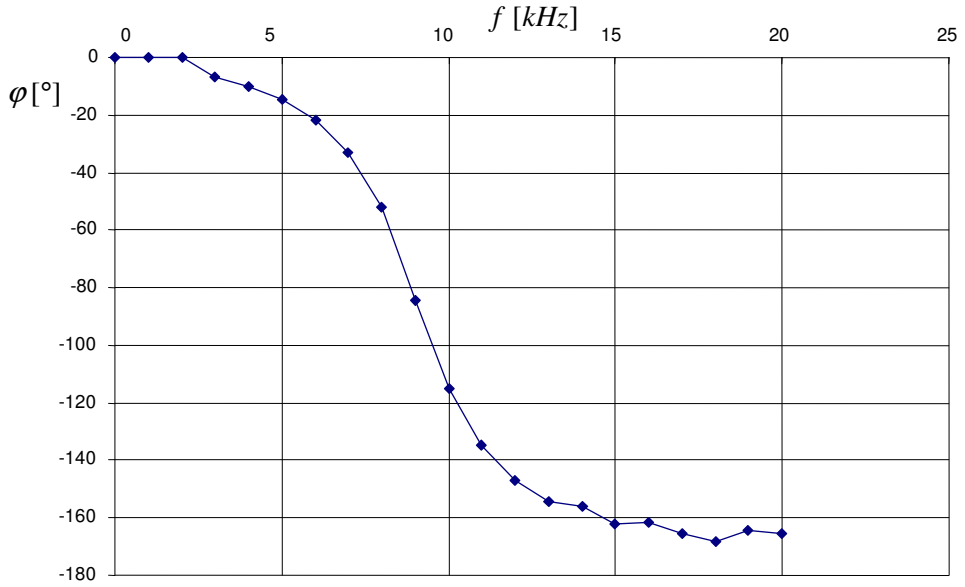


شکل پ-۱-۳ نمایش پاره خطی پاسخ دامنه به فرکانس



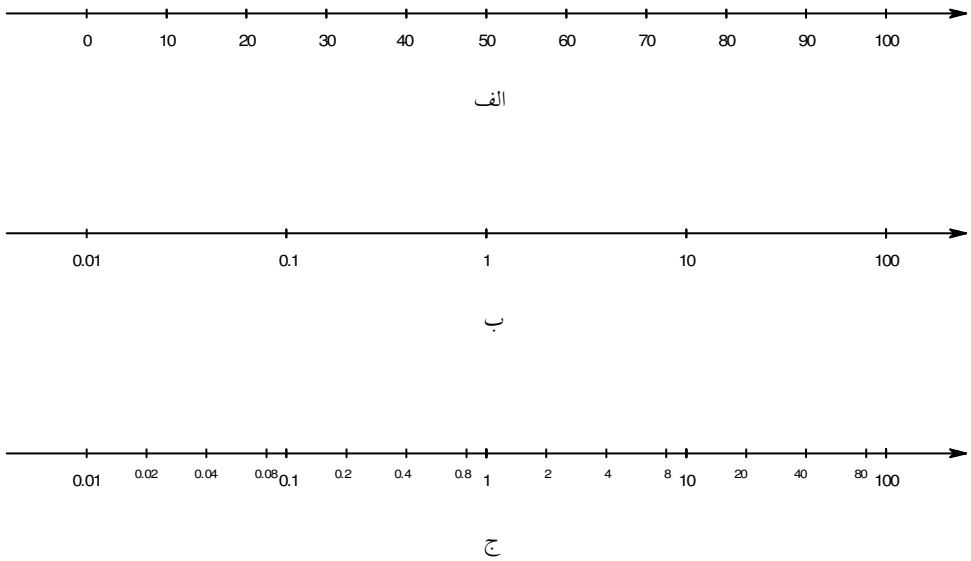
شکل پ-۱-٤ نمایش منحنی‌وار پاسخ دامنه به فرکانس

در شکل پ-۱-۵ فاز پاسخ فرکانسی نمایش داده شده است. برای رسم این نمودار مانند رسم نمودار دامنه عمل می‌شود.



پ-۱-٤ تعریف dB

هرگاه محدوده[1] تغییرات نسبت دو مقدار زیاد باشد، آنرا به صورت لگاریتمی نمایش می‌دهند. برای مثال اگر تغییرات یک نسبت از ۰٫۰۱ تا ۱۰۰ باشد و بخواهیم آنرا برروی یک محور نمایش دهیم، چنان که بخواهیم مقادیر کوچک به خوبی قابل تفکیک باشند، باید مثلاً واحد را به طول ۱۰ سانتی متر انتخاب نماییم، که در این صورت ۰٫۰۱ معادل یک میلی متر و هنوز قابل تشخیص خواهد بود؛ ولی در عوض طول کل محور باید ده متر باشد، که مقداری غیر عملی است! و اگر طول محور را مقداری منطقی مثلاً ده سانتی متر انتخاب نماییم، مقدار ۰٫۰۱ معادل ۱۰ میکرون بوده غیر قابل نمایش است. در صورتی که اگر محور را به صورت لگاریتمی تقسیم بندی کنیم، تمام محدوده به خوبی قابل تفکیک است. در شکل پ-۱-٦ مثال فوق نمایش داده شده است.



[1] گستره، Range

همان طور که می‌دانیم نسبت دو کمیت[1] یک جنس مقداری بدون دیمانسیون[2] و در نتیجه بدون واحد[3] است. مثلاً اگر توان منتقل شده از یک منبع سیگنال بر روی یک مقاومت $P_1 = 1mW$ باشد و توسط یک تقویت کننده بتوانیم مقدار آن را به $P_2 = 100mW$ برسانیم، نسبت این دو -که به آن ضریب بهره توان تقویت[4] کننده گویند- ۱۰۰ خواهد بود ($A_P = 100$). در اغلب نشریات فنی مرسوم است که – با وجود این که این نسبت از لحاظ فیزیکی بدون واحد است – برای آن واحدی در نظر بگیرند. مثلاً می‌گویند: ۱۰۰ برابر یا ۱۰۰ وات به وات ($A_P = 100\frac{W}{W}$).

همان طور که ذکر شد، محدوده‌های وسیع را معمولاً به صورت لگاریتمی در نظر می‌گیرند؛ در این صورت لگاریتم نسبت توان دو سیگنال را بر حسب بل بیان می کنند. این واحد، به افتخار مخترع تلفن گراهام بل[5]، نام گذاری شده است. در عمل مرسوم است که بجای بل از دسی بل[6] استفاده کنند. بنا به تعریف:

$$A_P[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \qquad (\text{پ}-۱-۱۰)$$

اگر یک منبع ولتاژ با نیروی محرکه $v_i = V_1$ به یک مقاومت R توان P_1 را منتقل نماید، در صورتی که یک تقویت کننده بین منبع و مقاومت قرار گیرد، ولتاژ دو سر مقاومت $v_o = V_2$ به عبارت دیگر توان منتقل شده به آن P_2 خواهد بود. بنابراین:

$$A_P[dB] = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{V_2^2/R}{V_1^2/R}\right) = 20 \cdot \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

---

[1] Quantity
[2] Dimension
[3] Unit
[4] اکثراً بهره توان (Power Gain) نامیده می‌شود
[5] Alexander Graham Bell
[6] dB: Deci Bell

از آن جایی که نسبت ولتاژ خروجی به ورودی یک تقویت کننده را ضریب تقویت ولتاژ یا بهره ولتاژ[1] نامند، بهره ولتاژ و به همین منوال بهره جریان[2]، بر حسب دی بی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_V[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (\text{پ-۱-۱۱})$$

$$A_I[dB] = 20 \cdot \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \qquad (\text{پ-۱-۱۲})$$

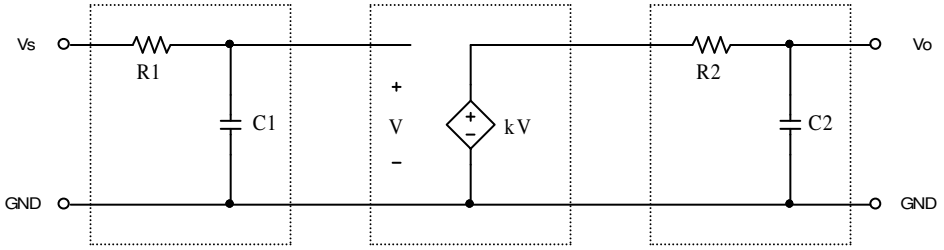
توجه شود که روابط (پ-۱-۱۱) و (پ-۱-۱۲) از رابطه (پ-۱-۱۰) برای یک مقاومت ثابت استخراج شده‌اند. ولی در عمل روابط فوق برای نسبت دو ولتاژ یا دو جریان تعریف می‌شوند، مستقل از این که ولتاژها و جریان‌ها مربوط به یک مقاومت باشند یا نباشند، مقاومت‌ها برابر باشند یا نباشند، سیگنال‌ها تقویت شده باشند یا تضعیف شده، ... در جدول پ-۱-۲ چند مقدار بر حسب دسی بل نمایش داده شده‌اند.

---

[1] Voltage Gain
[2] Current Gain

پیوست ۱-۵ نحوه بدست آوردن جواب‌های مدار پایین گذر درجه دوم در حالت خاص

برای بدست آوردن پاسخ فرکانسی دو مدار پایین گذر، که مانند مدار شکل پ- ۱-۷ توسط یک منبع وابسته به یک دیگر متصل شده باشند، می‌توان به ترتیب زیر عمل کرد:



مدار از سه بخش تشکیل شده است: پایین گذر $R1C1$، منبع وابسته به ولتاژ با بهره k و پایین گذر $R2C2$. بنا بر این پاسخ فرکانسی مجموعه از (پ-۱-۱۳) قابل محاسبه است.

$$A(\omega)=\frac{V_o(\omega)}{V_s(\omega)}=\frac{1}{1+j\omega C2R2}\cdot k\cdot\frac{1}{1+j\omega C1R1} \qquad \text{(پ-۱-۱۳)}$$

اگر $R1C1=1/\omega_1$ و $R2C2=1/\omega_2=\alpha/\omega_1$ و $\Omega=\omega/\omega_1$ در نظر گرفته شوند:

$$A(\Omega)=\frac{k}{(1+\alpha j\Omega)\cdot(1+j\Omega)} \qquad \text{(پ-۱-۱٤)}$$

و از آنجا بهره:

$$|A(\Omega)|=A=k\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2\,\Omega^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}=k\cdot A_2\cdot A_1 \qquad \text{(پ-۱-۱۵ الف)}$$

$$\angle A(\Omega)=\varphi=-\arctan(\alpha\Omega)-\arctan(\Omega)=\varphi_2+\varphi_1 \qquad \text{(پ-۱-۱۵ ب)}$$

به عبارت دیگر برای رسم نمودار بد سیستم، نمودار هر طبقه را بدست آورده آنها را با یک دیگر جمع می‌کنیم.

$$A[dB] = k[dB] + A_2[dB] + A_1[dB]$$
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

در اکثر مواقع، بیش از رسم کامل دیاگرام بد، فرکانس‌های حد (فرکانسی که به ازای آن دامنه به اندازه ۳ دی بی نسبت به مقدار ماکزیمم خود افت کرده است) برای ما اهمیت دارند. از (پ-۱-۱۵ الف):

$$\left|A(\Omega)\right|_{\max} = \left|A(\Omega = 0)\right| = k$$
$$\left|A(\Omega)\right|_{-3dB} = \left|A(\Omega_c)\right| = \frac{k}{\sqrt{\left(1+\alpha^2\,\Omega_c^2\right)\cdot\left(1+\Omega_c^2\right)}} = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

و از آنجا:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\alpha^2\,\Omega_c^2\right)\cdot\left(1+\Omega_c^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

به عبارت دیگر:

$$\left(1+\alpha^2\,\Omega_c^2\right)\cdot\left(1+\Omega_c^2\right) = 2$$

$$\alpha^2\,\Omega_c^4 + \left(1+\alpha^2\right)\cdot\Omega_c^2 - 1 = 0$$

$$\Omega_c^2 = \frac{-\left(1+\alpha^2\right) + \sqrt{\left(1+\alpha^2\right)^2 + 4\cdot\alpha^2}}{2\cdot\alpha^2}$$

و بالاخره:

با توجه به این که: $R1C1 = 1/\omega_1$، $R2C2 = 1/\omega_2 = \alpha/\omega_1$ و $\Omega = \omega/\omega_1 = f/f_1$ در نظر گرفته شده‌اند، مفهوم رابطه (پ-۱-۱۶) این است که: هر گاه دو مدار پایین گذر با فرکانس‌های حد f_1 و f_2 با نسبت فرکانسی $f_1/f_2 = \alpha$ توسط یک منبع وابسته، به یک دیگر وصل شوند، فرکانس حد سیستم

برابر خواهد بود با $f_c = \Omega_c \cdot f_1$. بنابراین اگر مثلاً $f_1 = f_2 = 10kHz$ باشد، $\alpha = 1$، $\Omega_c = 0.644$ و در نتیجه $f_c = 0.644 \cdot 10kHz = 6.44kHz$ خواهد بود. همچنین به ازای $f_1 = 1kHz$ و $f_2 = 10kHz$، $\alpha = 0.1$، $\Omega_c = 0.990$، در نتیجه $f_c = 0.99 \cdot 1kHz = 990Hz \approx f_1$. به همین ترتیب اگر $f_1 = 10kHz$ و $f_2 = 1kHz$ باشد، $\alpha = 10$، $\Omega_c = 0.099$ بوده، $f_c = 0.099 \cdot 10kHz = 990Hz \approx f_2$. از (پ-۱-۱۶) و مثال‌های فوق نتیجه می‌گیریم که به ازای $\alpha << 1$، $f_c \approx f_1$ و به ازای $\alpha >> 1$، $f_c \approx f_2$ خواهد بود. یعنی هرگاه دو مدار پایین گذر توسط یک منبع وابسته از یک دیگر جدا شده باشند، در صورتی که فرکانس حد یکی خیلی کوچکتر از فرکانس حد دیگری باشد، فرکانس حد مجموعه تقریباً برابر است با فرکانس حد کوچکتر. در جدول پ-۱-۳ فرکانس حد مجموعه دو پایین گذر برای چند مقدار α ذکر شده است. در این جدول فرکانس حد پایین گذر کوچکتر f_1 نامیده شده است، لذا $\alpha \le 1$ خواهد بود. در این جدول میزان خطای فرکانس حد سیستم - ناشی از برابر فرض کردن آن با فرکانس حد پایین گذر کوچکتر ($E_{rel}(f_c) = (f_1 - f_c)/f_c$) - نیز ذکر شده است. بالا خره در ردیف آخر میزان کاهش بهره در فرکانس $f = f_1$ محاسبه شده است.

جدول پ-۱-۳ وابستگی دقت محاسباتی به مقدار α

α	1/100	1/50	1/20	1/10	1/5	1/3	1/2	1
f_2/f_1	100	50	20	10	5	3	2	1
f_c/f_1	0.9998	0.9996	0.9975	0.990	0.964	0.912	0.838	0.644
$E_{rel}(f_c)[\%]$	0.0171	0.0435	0.2505	0.986	3.79	9.70	19.4	55.4
$\lvert A(\Omega=1)\rvert [dB]$	-3.011	-3.012	-3.021	-3.05	-3.18	-3.47	-3.98	-6.02

مطالب فوق الذکر - منجمله مقادیر جدول - در مورد دو بالا گذر که توسط یک منبع وابسته از هم جدا شده اند نیز صادق است؛ فقط باید توجه شود که جای f_1 و f_2 با هم عوض می‌شود.

مراجع:

[1] Die galvanische Kette : mathematisch bearbeitet (The Galvanic Circuit Investigated Mathematically) Berlin : Riemann, 1827. - 245 S. : graph. Darst

[2] O'Connor, John J; Edmund F. Robertson "Gustav Kirchhoff". MacTutor History of Mathematics archive.

[3] Eric W. Weisstein, Kirchhof, Gustav (1824-1887) at ScienceWorld.

[4] http://en.wikipedia.org

[5] Norton's theorem - Wikipedia, the free encyclopedia.mht

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Miller's theorem.htm

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series#Historical_development