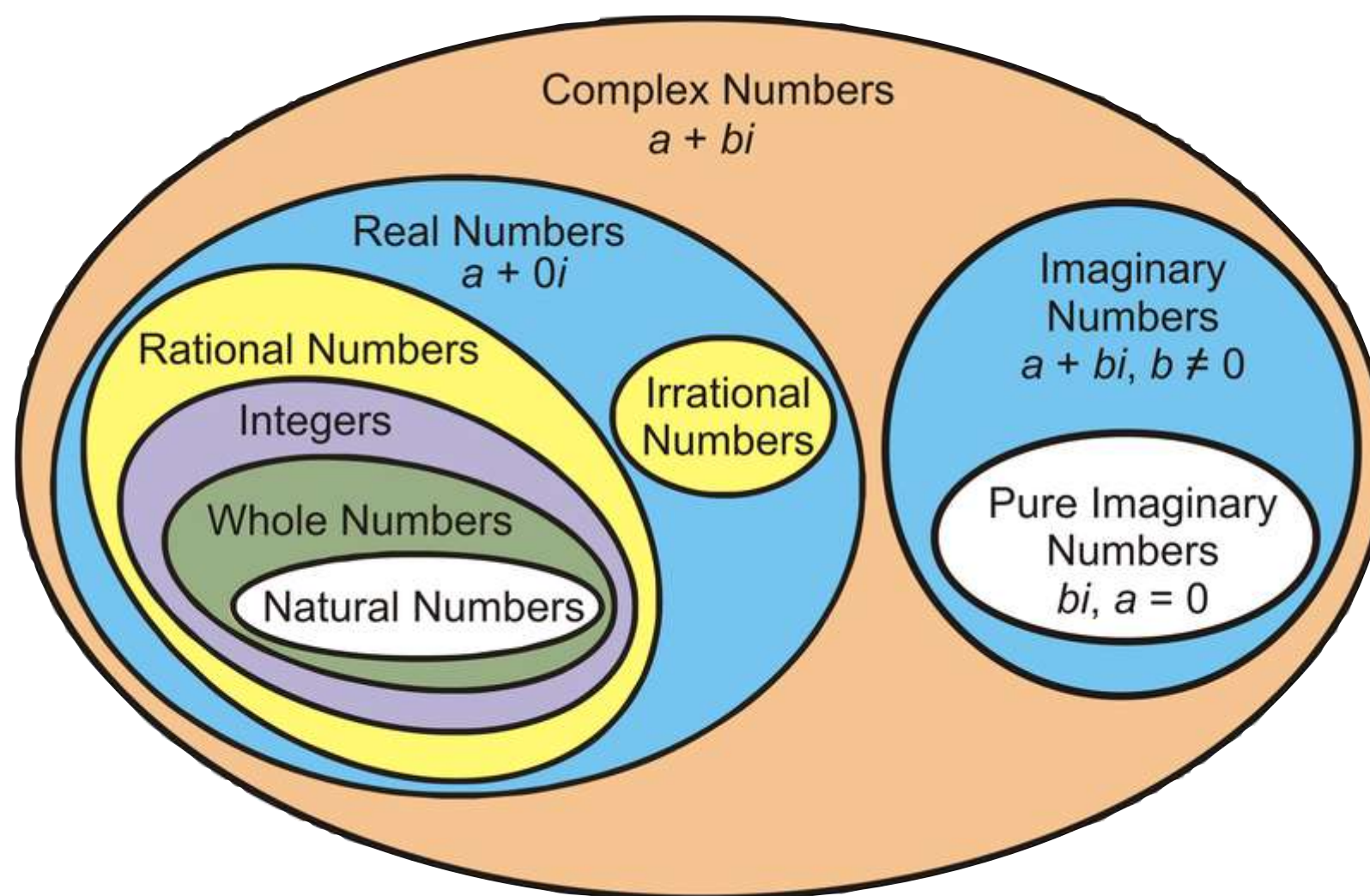




مروری کوتاه بر اعداد مختلط



تعریف عدد مختلط

هر عدد مختلط z به صورت زیر (x, y) از اجزاء حقیقی و تخیلی می‌شود. مولفه x قسمت حقیقی z و مولفه y قسمت موهومی z نام دارد:

$$z = (x, y) \quad , \quad \begin{cases} x \triangleq \operatorname{Re}\{z\} \\ y \triangleq \operatorname{Im}\{z\} \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{R}$



تعریف عدد مختلط

گروه اولی مختلط $\mathbb{C}$ عبارتست از مجموع نام زبر مرتب های $\mathbb{R}^2$ با توجه به رابطه جمع زیر

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \triangleq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

و ضرب اسکالر $a(x, y) = (ax, ay)$

گروه $\mathbb{C}$ تشکیل یک فضای برداری دو بعدی روی میدان $\mathbb{R}$ می دهد. پایه های استاندارد برای

این فضا عبارتند از:

$$\begin{cases} 1_{\mathbb{C}} \triangleq (1, 0) \\ i \triangleq (0, 1) \end{cases}$$

$$z = (x, y) = x \underbrace{(1, 0)}_{1_{\mathbb{C}}} + y \underbrace{(0, 1)}_{i}$$

$$= x + iy$$



ضرب اعداد مختلط

رابطه ضرب در اعداد مختلط : صورت زیر تعریف می شود :

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \triangleq (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

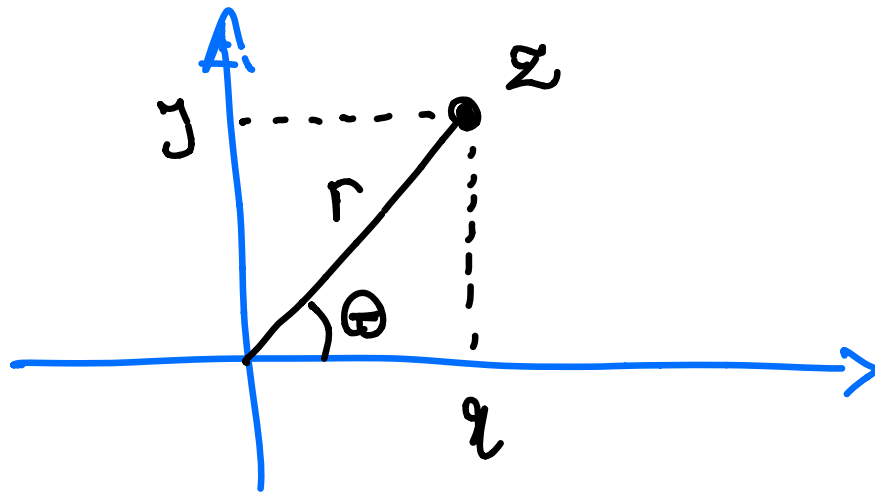
حاجتی نداره

$$\begin{aligned} \Rightarrow i \cdot i &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1, 0) = -1_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$



نمایش در صفحه دو بعدی

با توجه به نمایش بونی فضای $\mathbb{C}$ می‌توانیم اعداد مختلط را توسط بردار در صفحه دو بعدی نمایش دهیم.



$$z = (x, y) = x + jy \quad \text{داد:}$$

$$= r \angle \theta$$

↙ ↘
زاویه فاز فاز

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

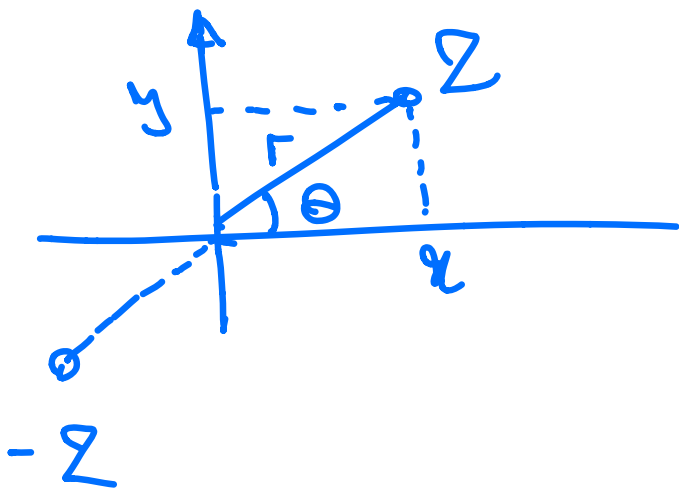


نمایش قطبی

نکته: در مختصات قطبی، زاویه θ به صورت استاندارد بین $-\pi$ ، π تعریف می‌شود:

$$\theta \in (-\pi, \pi]$$

$$z = x + jy$$

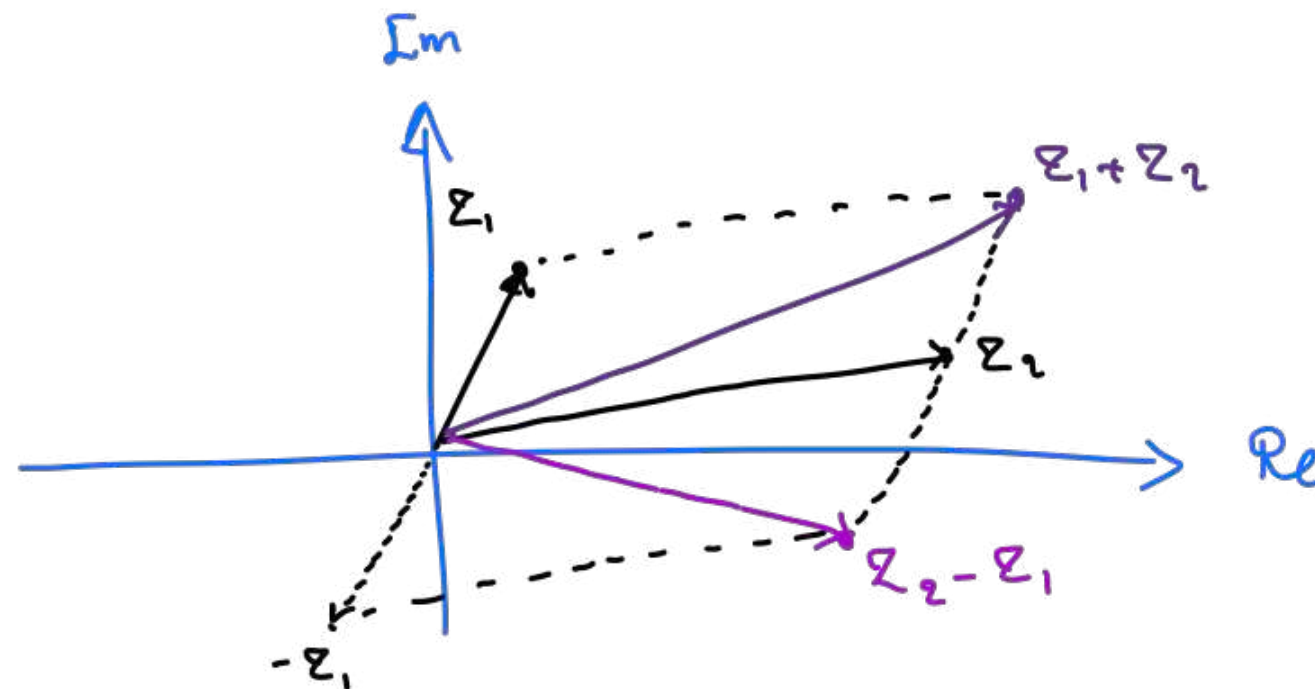


$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x) & , \quad x, y \geq 0 \\ // & +\pi & x < 0, y > 0 \\ // & -\pi & x < 0, y < 0 \\ // & & x > 0, y < 0 \end{cases} \end{cases}$$



جمع و تفریق

جمع و تفریق اعداد مختلط را نیز می‌توان توسط جمع بردارهای دو بعدی محاسبه کرد.



$$z = (u, v) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

$$= r \cos(\theta) + j r \sin(\theta) = r (\cos(\theta) + j \sin(\theta))$$



تابع نمایی

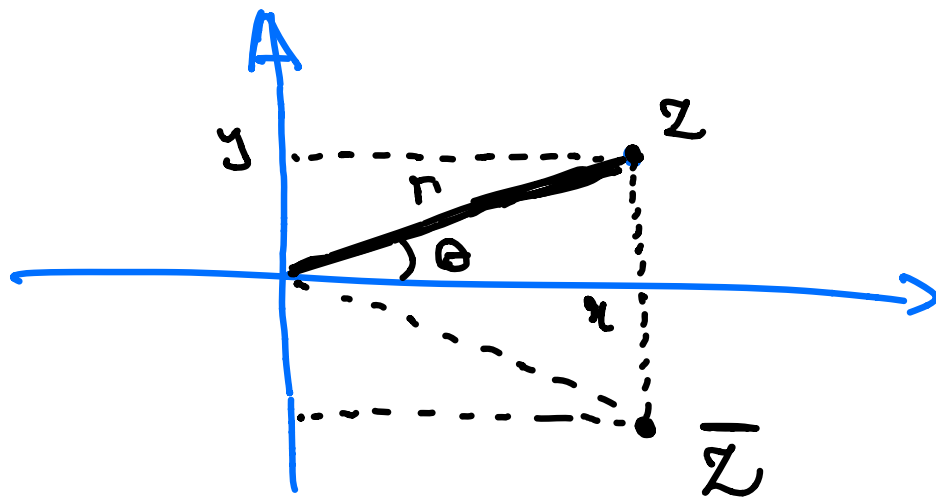
$$\begin{aligned} e^{\dot{\theta}} &\cong 1 + \dot{\theta} + \frac{(\dot{\theta})^2}{2!} + \dots \\ &= 1 + \dot{\theta} - \frac{\theta^2}{2!} - \dot{\theta} \frac{\theta^3}{3!} + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right)}_{\cos(\theta)} + \dot{\theta} \underbrace{\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right)}_{\sin(\theta)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} e^{\dot{\theta}} &= \cos(\theta) + \dot{\theta} \sin(\theta) \\ \mathcal{Z} &= r e^{\dot{\theta}} \end{aligned} \right|$$



مزدوج

زوج مختلط $z = (x, y)$ مبرسے لے $\bar{z} = (x, -y)$



$$\begin{cases} z = x + jy = r e^{j\theta} \\ \bar{z} = x - jy = r e^{-j\theta} \end{cases}$$

تقسیم

وارفتن فرم: $z = x + jy \Rightarrow \frac{1}{z} = ?$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{(x + jy)(x - jy)} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2}$$

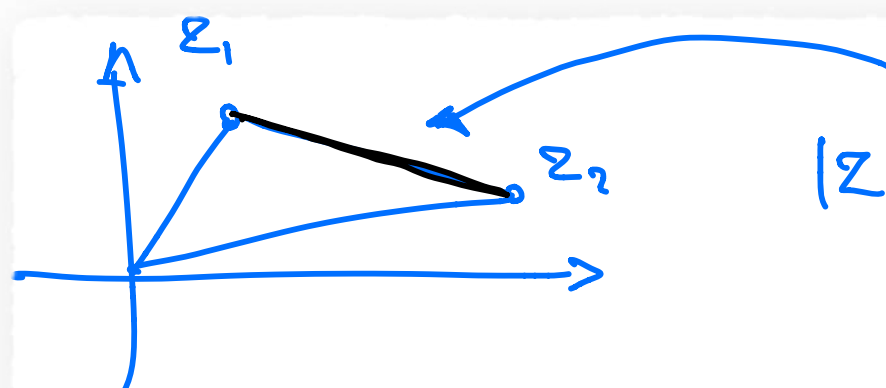
✓✓✓ حل کردن: $z \cdot \frac{1}{z} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow (x + jy) \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{(x + jy)(x - jy)}{x^2 + y^2} = 1$ ✓

$$z \neq 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-j\theta} \end{array} \right.$$



اندازه

$$z = x + jy = r e^{j\theta} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} |z| = r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{z \bar{z}} \end{aligned}}$$


$$\begin{aligned} |z_1 - z_2| &= \text{فاصله بین } z_1, z_2 \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})} \end{aligned}$$



خواص اندازه و مزدوج

$$I) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

خواص اندازه :

$$II) |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$I) \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

خواص مزدوج :

$$II) \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$III) |\overline{z}| = |z|$$



مثال

$$\bar{z} = \text{Im}(z) + \text{Re}(z) \quad \text{و} \quad z = (1 + 2j) + \sqrt{2} e^{-j\pi/4} \quad \text{برای}$$

$$\angle z = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad |z| = \frac{1}{2}$$

$$z = (1 + 2j) + \left(\underbrace{\sqrt{2} \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + j \underbrace{\sqrt{2} \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= (1 + 2j) + (1 - j) = \boxed{2 + j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Re}(z) = 2}$$

$$\boxed{\text{Im}(z) = 1}$$

$$\boxed{\bar{z} = 2 - j}$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}}$$

$$\angle z = \tan^{-1}(1/2) \approx 0.46 \text{ rad}$$

$$\frac{1}{z} = \boxed{\frac{2}{5} - j \frac{1}{5}}$$



ضرب و تقسیم در مختصات قطبی

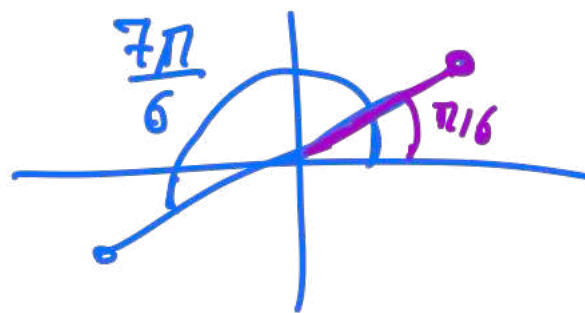
$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = r_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \end{cases}$$



مثال

$$(\sqrt{3} + j)^7 = ?$$

$$\sqrt{3} + j = 2 e^{j\pi/6}$$



$$\Rightarrow (\sqrt{3} + j)^7 = (2 e^{j\pi/6})^7 = 2^7 \underbrace{e^{j\frac{7\pi}{6}}}_{-e^{j\pi/6}} = -64 \cdot 2 \cdot e^{j\pi/6}$$

$$= \underline{\underline{-64\sqrt{3} - 64j}}$$



ریشه‌های یک عدد مختلط

برای z_0 داده شده، ریشه‌های n ام z_0 عبارتند از اعداد مختلط z که $z^n = z_0$ (که)

$$\begin{cases} z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \\ z = r e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\theta} \right)^n = r_0 e^{i\theta_0} \\ \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = r_0 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[n]{r_0}} \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi}{n} k} \end{cases}$$

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1$$

$\Rightarrow$ هر عدد مختلط (غیر از ۰) ریشه n ام دارد



ریشه‌های یک عدد مختلط

برای z_0 داده شده، ریشه‌های n ام z_0 عبارتند از اعداد مختلط z که $z^n = z_0$ (که)

$$\begin{cases} z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \\ z = r e^{i\theta} \end{cases} \Rightarrow \left(e^{i\theta} \right)^n = r_0 e^{i\theta_0} \\ \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

